El Subsistema de Curvas Mesocúrticas en la Sistematización Pearsoniana y su Aplicación Sociográfica

Por Óscar Uribe Villegas

Si en el sistema de ecuaciones dado por la referencia 1 (que establece las relaciones entre los diversos momentos de una distribución respecto a la media aritmética), sustituimos los momentos en unidades originarias (representados por mus minúsculas μ) por esos mismos momentos expresados en unidades de la desviación cuadrática media (sigma minúscula σ), los parámetros del sistema de ecuaciones dejarán de ser a, b_0, b_1, b_2; los nuevos parámetros los representaremos por las letras minúsculas griegas correspondientes alfa subíndice cero, beta subíndice uno, beta subíndice dos. Por otra parte, como el segundo momento sigmático es igual a la unidad (puesto que es igual a mu subíndice dos entre el cuadrado de sigma, que es precisamente igual a mu subíndice dos), podremos escribir el sistema de ecuaciones de la referencia 2. En dicho sistema el cambio más notable es el ya señalado del segundo momento por 1 en el segundo miembro de la segunda ecuación del sistema. Como el subsistema que vamos a considerar en esta ocasión es el de las curvas mesocúrticas o sea el de aquellas para las que el cuarto momento sigmático (gamma minúscula subíndice 4) o índice de curtosis, aplanamiento o picudez es igual a 3, al sustituir gamma subíndice cuatro por su valor en la ref. 2 se obtienen las ecuaciones de la ref. 3. En este sistema, el cambio principal es el de gamma minúscula subíndice 4 por 3 en el segundo miembro de la última ecuación, y el de 5 beta subíndice dos por gamma sub-4 por 15 beta índice dos como último término del primer miembro de la última ecuación.

Al despejar a alfa de la ref. 3.1 se obtiene la igualdad que muestra que alfa y beta sub-1 son simétricos. Al despejar de la ref. 3.2 a beta sub-0 se obtiene su equivalente en términos de beta sub-2.

Al sustituir en la 3.3 el valor de alfa tomando de la 3.11 se obtienen las referencias 3.31 y 3.32. Al sustituir en la ref. 3.4 el equivalente de beta sub-0 tomado de la ref. 3.21, se obtienen las referencias 3.41, 3.42 y 3.43.

Con las ecuaciones 3.32 y 3.43 se puede formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (beta sub-1 y beta sub-2). Para resolver este sistema se multiplicó la 3.32 por 3 gamma sub-3 y así se obtuvo la ref. 3.33, y la 3.43 se multiplicó por 2 y así se obtuvo la ref. 3.44.

La resta de la ref. 3.33 menos la ref. 3.44 produjo la ref. 3.5, de la que fue posible despejar a beta sub-2 como lo muestra la ref. 3.51. La ref. 3.52 puede considerarse, así, como la fórmula del parámetro beta sub-2 en el subsistema de curvas mesocúrticas de la sistematización pearsoniana.

Para obtener el valor de beta sub-1 (el otro parámetro del sistema formado por las referencias 3.32 y 3.43) podemos despejar a 2 beta sub-1 (ref. 3.32). Al sustituir en la ref. 3.33 el valor de beta sub-2 tomada de la ref. 3.52, se obtiene la 3.34. Una serie de reducciones culminan con la 3.37. Si en la ref. 3.37 se pasa el 2 que figura como coeficiente de beta sub-1 al otro miembro, como denominador, se obtiene la ref. 3.6 que es la fórmula del parámetro beta sub-1 en el subsistema de curvas mesocúrticas.

Como, de acuerdo con la ref. 3.11, alfa es el simétrico de beta sub-1, es posible escribir la ref. 3.7 que es la fórmula del parámetro alfa en el subsistema mesocúrtico.

Si en la ref. 3.21 sustituimos beta sub-2 por su valor tomado de la ref. 3.52 obtendremos la 3.22 que conduce, a través de una serie de reducciones, a la ref. 3.25. Esta referencia nos permite escribir finalmente la ref. 3.8 como fórmula del parámetro beta sub-0 en el subsistema mesocúrtico.

Fórmula genérica, no integral, del subsistema mesocúrtico. La referencia 4.1 no hace sino transcribir la fórmula genérica del sistema pearsoniano, en su forma no integral, tal como queda dado en términos de desviaciones respecto a la media aritmética en unidades sigmáticas (delta minúscula). Si en esta fórmula se sustituye beta sub-2 por su valor (3 en el caso del subsistema mesocúrtico) se obtendrá la ref. 4.2.

El trinomio de segundo grado del denominador de la ref. 4.2 puede descomponerse en factores; más precisamente, puede descomponerse en tres factores: el coeficiente de la segunda potencia de la variable (3) y dos factores formados por la diferencia entre la variable y cada una de las dos raíces de la ecuación de segundo grado que puede formar el trinomio. Esto es lo que se ha expresado en la ref. 4.21.

Si en la expresión 4.21 se representa por B la porción racional y por C la porción irracional de las raíces de la ecuación de segundo grado, se obtendrá la ref. 4.22.

Puesto que B representa la parte racional (o sea beta sub-1 entre 6) como lo expresa la ref. 4.23, es posible despejar el valor de beta sub-1 como se ha hecho en la 4.24 y si se recuerda lo que quedó asentado en la ref. 3.11 será posible escribir la ref. 4.25 que da el eqquivalente de alfa en términos de B (igual a 6 B).

Si el valor de alfa dado por la ref. 4.25 se sustituye en la ref. 4.2, y se hace lo mismo con el trinomio de segundo grado que figura en el denominador (al que substituimos por su equivalente dado en la ref. 4.22), se obtendrá la ref. 4.3, que pone claramente de relieve la estructura genérica del subsistema de curvas mesocúrticas.

Discusión de la fórmula del subsistema de curvas mesocúrticas. La discusión de la fórmula recién encontrada debe girar en torno de los diferentes tipos de valor que puede alcanzar C. En efecto, en cuanto se trata de una magnitud afectada por una radical de segundo grado, puede ser:

1º Una cantidad real. En tal caso, se seguirá representando simplemente por C
2º Una cantidad nula. En tal caso C valdrá cero
3º Una cantidad imaginaria. En tal caso podrá representarse por Ci (puesto que i representa la unidad imaginaria)

Este principio de discusión de la fórmula es importante, porque de él dependen las diferentes formas de integración de la fórmula genérica para los casos específicos.

Integración de la fórmula:

Cuando C es real. Partiremos de la ref. 4.3, y en ellas representamos la diferencia de delta minúscula menos B (que aparece en dos de los factores del denominador) por la letra griega theta (ϑ) conforme lo indica la ref. 4.31. Esto permite establecer también las refs. 4.32 y 4.33. La última de las referencias mencionadas da el equivalente del numerador.

Al sustituir en la ref. 4.3, los valores dados por las 4.31 y 4.33, obtendremos la ref. 4.4.

La expresión 4.4 puede descomponerse en dos fracciones (mediante el método de descomposición en fracciones parciales) según se asienta en la ref. 4.5.

Para integrar la ref. 4.5 hay que integrar separadamente sus dos miembros. La integral del primer miembro (integral de la derivada de la variable, dividida entre la variable) es el logaritmo natural de la variable. La integral del segundo miembro es igual a la suma de los integrales de las fracciones, las cuales, a su vez, están formadas por una parte constante que subsiste como tal y una variable que, al integrarse aparece como el logaritmo natural correspondiente (por razones idénticas a las que permitieron establecer la integral del primer miembro). Aparece, además, la constante de integración. A base de todo esto pudo escribirse la ref. 4.6.

Para pasar de la forma logarítmica a la natural, hay que tomar los antilogaritmos de ambos miembros de la ref. 4.6. El antilogaritmo del logaritmo de una variable es la variable misma, como aparece en el primer miembro de la ref. 4.7. El antilogaritmo del segundo miembro de la 4.6 es el antilogaritmo de una suma de tres términos, que se convierte en el producto de los antilogaritmos de los términos (o sea, en un producto de tres factores). Los tres factores del producto del segundo miembro son e elevada a la constante de integración, y cada una de las expresiones afectadas por el operador log. en la ref. 4.6 elevada a un exponente igual al coeficiente que las afectaba en la ref. 4.6.

La ref. 4.7 proporciona la fórmula integral, especificada para el caso de C real, en el subsistema de curvas mesocúrticas de la sistematización pearsoniana.

Cuando C es nulo. Si C es nulo, la ref. 4.3 se convierte en la 4.41. Si como en la 4.31 establecemos una igualdad entre delta menos B y theta, al sustituir este valor en la expresión anterior se obtiene la referencia 4.41.

Para integrar la expresión de la 4.41 hay que integrar sus dos miembros. La integral del primero es, como en el caso anterior, el logaritmo de la variable. El segundo miembro de la 4.41 puede descomponerse en dos fracciones; tras simplificar la primera, aparece en ésta la diferencial de theta, entre theta, o sea, que su integral será el logaritmo de theta; en cuanto a la segunda fracción por integrar, en ella figura theta a la menos 2 (o sea theta al cuadrado en el denominador) cuya integral es theta a la menos 1 dividida entre menos 1, de tal manera que la integral de esta fracción es la que figura como segundo miembro (con signo negativo) en la ref. 4.61. El tercer sumando del segundo miembro de la expresión 4.61 es, por supuesto, la constante de integración.

Para pasar de la expresión logarítmica a la expresión natural, basta con tomar los antilogaritmos de los dos miembros de la ref. 4.61. El antilogaritmo del logaritmo de la variable del primer miembro es, por supuesto, la variable pues las dos operaciones contrarias (logaritmación y antilogaritmación) anulan sus efectos. En el segundo miembro de la 4.61 figura una suma de logaritmos que corresponde a un producto de cantidades no logarítmicas (producto de tres factores como la suma era de tres sumandos). El primer factor estará constituido por theta elevado a un tercio puesto que en la 4.61 figuraba un tercio como coeficiente del logaritmo de theta; el segundo factor tendrá que ser un exponencial pues el antilogaritmo de una cantidad no sujeta a logaritmación es la propia cantidad tomada como exponente de la base (e) de los logaritmos naturales; el tercer factor tendrá que ser una exponencial también, en la que la constante de integración aparezca como exponente de la base (e) de los logaritmos naturales. Para mayor facilidad, sin embargo, dicho factor suele representarse por y', por ejemplo, y colocarse al principio del segundo miembro de la 4.71 que es la expresión integral del subsistema de curvas mesocúrticas especificada para cuando C es nula.

Cuando C es imaginario. En este caso, el último término de cada uno de los dos últimos factores del denominador de la referencia 4.3 no será C, sino Ci (en donde i representa la raíz cuadrada de menos 1, o sea, la unidad imaginaria). Sustituciones análogas a las que realizamos en los dos casos precedentes nos permiten establecer la ref. 4.42. El producto de los dos últimos factores del denominador es la suma de los cuadrados de los términos que forman cada factor por tratarse de dos complejos conjugados cuyo producto es análogo al de $a + b$ por $a - b$, por lo cual es posible establecer la ref. 4.421.

Si se toman las integrales de los dos miembros de la 4.421, se obtiene, de inmediato, para el primer miembro, como resultado, logaritmo de y (como en los dos casos anteriores y por idénticas razones). La integral del segundo miembro puede descomponerse en la suma de dos integrales (cuyos integrandos serán fracciones que tendrán por denominador el de la suma y por numeradores cada uno de los sumandos del numerador original). Esto es lo establecido por la ref. 4.521.

La integración de cada una de las fracciones de la 4.521 produce, por una parte, una expresión logarítmica (como primer término) y, por otra, una en la que interviene el arco cuya tangente es el cociente de los dos términos que figuran exponenciados en el numerador. Esto es natural, pues mientras en el primer integrando figuraba la variable (theta) en el numerador, en el segundo integrando, dicha variable no figura. Así pudo obtenerse la ref. 4.62.

El paso de la expresión logarítmica a la no logarítmica se hace como en los otros casos: la suma de tres expresiones logarítmicas debe dar lugar al producto de tres factores no logarítmicos; el término en el que figura un logaritmo afectado por un coeficiente se convierte en factor en el que la expresión sujeta a logaritmación aparece afectada del correspondiente exponente; el término en que figuran sólo cantidades no logarítmicas se convierte en exponente de la base de los logaritmos naturales y como factor entra en la expresión resultante, y algo parecido ocurre en el caso de la constante de integración que aparecía como sumando en la 4.62 y acaba por aparecer como exponente de e en la 4.72, aunque a veces se la sustituya por y' y se la coloque al principio de la expresión.

La expresión de la referencia 4.72 especifica la fórmula general del subsistema de curvas mesocúrticas para cuando C es imaginario (o sea, para cuando beta sub-1 a la segunda, menos cuatro veces el producto de beta sub-0 por beta sub-2 es negativo).

Cálculo del parámetro y'

Cuando C es real. Si para mayor simplicidad, en la ref. 4.7 representamos los exponentes de los dos factores binomiales por F_1 y por F_2 respectivamente, obtendremos la expresión de la referencia 5.1.

Si sustituimos a $(C + \vartheta)/2C$ por una nueva variable, z, tal como se expresa en la 5.11, es fácil obtener el equivalente del binomio del primer paréntesis en el segundo miembro de la ecuación 5.1 en términos de z (ref. 5.12). De la 5.12, es posible despejar a theta (ref. 5.13) y obtener finalmente el equivalente del binomio del segundo paréntesis (ref. 5.14).

La sustitución de los equivalentes de cada uno de los paréntesis de la ref. 5.1 dados por las referencias 5.12 y 5.14, permiten escribir la ref. 5.2.

Para integrar la expresión recién encontrada, hay que hacerlo con sus dos miembros, lo cual nos permite escribir la ref. 5.3, en la que sigma mayúsculas de f (Σf) representa el efectivo de la distribución, y en la que y" (que representa a y' por menos 1 a la F_2) se ha sacado del integrador, por tratarse de una constante. Si, además, se sacan del integrador 2C a la F_1 que figura como factor de z y 2C a la F_2, que figura como factor de (1-z) así como a 2C que figura en la porción diferencial del integrando (equivalente a la dz que forma parte de la 5.3) se obtiene la expresión 5.5

En la expresión 5.5, la parte integral es:
Una integral definida entre cero y la unidad
de una variable (z) elevada a un exponente constante (F_1)
multiplicada por el complemento de la variable respecto a
la unidad (1-z), elevada a otro exponente constante (F_2)

Esta expresión es típica: se la conoce como la función Beta mayúscula de los exponentes (F_1 y F_2) incrementado cada uno de ellos en una unidad $(F_1 + 1, F_2 + 1)$. Es esto lo que nos ha permitido escribir la ref. 5.6.

Si en la ref. 5.6 se despeja el valor de y", se obtiene la expresión de la ref. 5.7.

La función beta mayúscula puede expresarse en términos de otra función, a la que se conoce como función gamma mayúscula (Γ). La función beta mayúscula de dos cantidades $(F_1 + 1$ y $F_2 + 1)$ es igual al producto de las funciones gamma mayúsculas de dichas cantidades $\Gamma(F_1+1)$ por $\Gamma(F_2+1)$ dividido entre la función gamma mayúscula de la suma de dichas cantidades Γ $(F_1+1+F_2+1=F_1+F_2+2)$. Esta propiedad nos ha permitido escribir la referencia 5.8 a partir de la 5.7.

En cuanto la simplificación que introdujimos al principio ha cumplido ya sus objetivos, podemos volver ahora a los términos originales de la expresión, sustituyendo F_1 y F_2 por sus equivalentes: (C-7B)/6C y (C + 7B)/6C. Esto nos permite establecer las equivalencias de la 5.9. La ref. 5.91 nos da el equivalente de $F_1 + F_2 + 1$ (igual a cuatro tercios), la 5.92, nos permite establecer la de $F_1 + F_2 + 2$ (siete tercios); la 5.93, establece la equivalencia de $F_1 + 1$ y la 5.94 la de $F_2 + 1$.

Al sustituir los valores obtenidos en las referencias 5.9 dentro de la ref. 5.8, podemos obtener la ref. 6 que expresa el valor de y" cuando C es real.

Cuando C es nulo. Integraremos los dos miembros de la ref. 4.71 de acuerdo con la expresión 5.11, en la que la suma de las frecuencias o efectivo de la distribución aparece en el primer miembro, y en el segundo se ha sacado a y' del integrador por tratarse de una constante.

Si sustituimos el exponente de e en la 5.11 por una nueva variable z (ref. 5.111), podemos obtener a partir de dicha igualdad el equivalente de theta, y de diferencial de theta (refs. 5.112 y 5.113) que figuran en la 5.11.

Al sustituir en la 5.11 los valores obtenidos en la 5.11 y 5.12 y 5.13, se obtiene la expresión 5.21. Si de dicha expresión se saca (—7B/3) elevado a 1/3, del integrador y se deja dentro del mismo tan sólo a z a la menos 1 (la zeta del denominador) elevada a un tercio, y se saca también del integrador a 7B/3 (o a —7B/3 por —1), obtendremos la expresión 5.31.

La parte sujeta a integración en la ref. 5.31 es:

Una integral definida entre cero e infinito	$(\int_0^\infty)$
de una exponencial cuyo exponente es una variable	$(-z)$
multiplicada por el simétrico de dicha variable	$(+z)$
elevado a un exponente constante	$(2\frac{1}{3})$
estando referida la integral a la variable correspondiente	(dz)

Esta expresión también es típica: se la conoce como la función gamma mayúscula del exponente de la variable adicionada en una unidad	$\Gamma(-2\frac{1}{3}+1)$

Esto nos permite escribir la referencia 5.41, la cual se convierte, finalmente en la 5.51 que es la fórmula para el cálculo de y' cuando C es nula.

Cuando C es imaginario. Partiremos de la referencia 5.12 que es una forma simplificada de la 4.72 pues el coeficiente de arco cuya tangente es theta entre C ha sido sustituido por la constante b. En esta referencia —además—, se han integrado el primero y el segundo miembros (de ahí que en el primero aparezca el efectivo en vez de y, y en el segundo, aparezca el signo de integración y $d\Theta$).

Si, de acuerdo con la ref. 5.121, sustituimos a arco cuya tangente es theta entre C, por z, podemos obtener de esta igualdad el equivalente de theta entre C (que es la tangente de z) y el equivalente de diferencial de theta que es C por el recíproco del cuadrado del coseno de z por diferencial de z (ref. 5.123).

Si en la 5.12 dividimos el binomio de dentro del paréntesis entre C^2, tendremos que multiplicar todo por C^2 elevada a un sexto, para que la expresión no se altere. Ese C al 1/3 por el que hay que multiplicar puede salir del integrador. Así es como puede escribirse la referencia 5.22.

Cuando en la 5.22 se sustituyen los equivalentes dados por las referencias 5.121, 5.122 y 5.123, se obtiene la 5.32.

Como 1 más el cuadrado de la tangente, que figura en el integrando, equivale a la secante cuadrada y ésta aparece elevada a 1/6, en lugar de todo el paréntesis elevado a un sexto, puede escribirse: secante de z, elevada (la secante) a un tercio. La C (constante) que aparecía en el integrando en la 5.42 salió del integrador y aparece en la 5.33 como la unidad adicional del exponente de C de fuera del integrador.

En vista de que la secante es recíproca del coseno, en vez de la potencia 1/3 de la secante de z puede escribirse la potencia menos 1/3 del coseno de z, que en unión de la potencia menos 2 de la porción diferencial del integrando, producirá la potencia —2⅓ del coseno de z, como aparece en la 5.52.

Si sustituimos 90° — z por una nueva variable y (conforme a la ref. 5.521), será necesario cambiar: límites de integración, parte integral del integrando y parte diferencial del mismo. Si z vale 90°, y valdrá cero; si z vale —90°, y valdrá 180° (ref. 5.522); z, despejado de la 5.521 es el complemento de y (ref. 5.523) y su coseno es igual al seno de y (ref. 5.5231); en cuanto al diferencial de z es igual al simétrico del diferencial de y (ref. 5.524).

La sustitución de los equivalentes anteriores produce la 5.62, de la que podemos remover a e elevado a 90° por b, que figura en el integrando, haciéndolo pasar fuera del integrador, bajo la forma e elevado a pi sobre dos por b. En esta forma se llega a la referencia 5.72, de la que puede obtenerse el valor de y' si se le despeja como se hizo en la 5.82.

La aplicación sociográfica de este subsistema de curvas debe ponerse en relación directa con el significado que para los índices de curtosis, aplanamiento o picudez se dan en obras como "La Matemática, la Estadística y las Ciencias Sociales", publicada por este Instituto, redactada bajo la responsabilidad del autor de esta nota.

Referencia 1. Sistema de ecuaciones en función de momentos respecto a la media aritmética:

1.1 $a + b_1 = 0$

1.2 $b_0 + 3b_2\mu_2 = -\mu_2$

1.3 $a\mu_2 + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$

1.4 $a\mu_3 + 3b_0\mu_2 + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$

Referencia 2. Sistema de ecuaciones en función de los momentos sigmáticos:

2.1 $\alpha + \beta_1 = 0$

2.2 $\beta_0 + 3\beta_2 = -1$

2.3 $\alpha + 3\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3$

2.4 $\alpha\gamma_3 + 3\beta_0 + 4\beta_1\gamma_3 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$

Referencia 3. Subsistema de curvas mesocúrticas.

$$\gamma_4 = 3$$

3.1 $\alpha + \beta_1 = 0 \therefore$ 3.11 $\alpha = -\beta_1$

3.2 $\beta_0 + 3\beta_2 = -1 \therefore$ 3.21 $\beta_0 = -1 - 3\beta_2$

3.3 $\alpha + 3\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3$

3.4 $\alpha\gamma_3 + 3\beta_0 + 4\beta_1\gamma_3 + 15\beta_2 = -3$

3.31 $-\beta_1 + 3\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3 \therefore$ 3.32 $2\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3$

3.41 $-\beta_1\gamma_3 + 3\beta_0 + 4\beta_1\gamma_3 + 15\beta_2 = -3$

3.42 $-\beta_1\gamma_3 - 3 - 9\beta_2 + 4\beta_1\gamma_3 + 15\beta_2 = -3$

$$3\beta_1\gamma_3 + 6\beta_2 = 0$$

3.43 $3\beta_1\gamma_3 + 6\beta_2 = 0$

3.33 $$6\beta_1\gamma_3 + 12\beta_2\gamma_3^2 = -3\gamma_3^2$$

3.44 $$\underline{6\beta_1\gamma_3 + 12\beta_2 \quad = \quad 0}$$

3.5 $$12\beta_2(\gamma_3^2 - 1) = -3\gamma_3^2$$

3.52 $$\beta_2 = \frac{-3\,\gamma_3^2}{12\,(\gamma_3^2 - 1)} = \frac{-\gamma_3^2}{4\,(\gamma_3^2 - 1)}$$

3.521 $$2\beta_1 = -\gamma_3 - 4\beta_2\gamma_3 =$$

3.34 $$= -\gamma_3 - 4\left(\frac{-\gamma^2{}_3}{4\,(\gamma_3^2 - 1)}\right)\gamma_3 =$$

3.35 $$= \gamma_3\left(-1 + \frac{\gamma_3^2}{\gamma^2{}_3 - 1}\right) =$$

3.36 $$= \gamma_3\left(\frac{-\gamma^2{}_3 + 1 + \gamma^2{}_3}{\gamma^2{}_3 - 1}\right) =$$

3.37 $$= \frac{\gamma_3}{\gamma^2{}_3 - 1}$$

3.6 $$\therefore\ \beta_1 = -\frac{\gamma_3}{2\,(\gamma^2{}_3 - 1)} = \alpha$$

3.7 $$\alpha = \frac{\gamma_3}{2\,(\gamma^2{}_3 - 1)}$$

3.22 3.23

$$\beta_0 = -1\text{-}3\left(\frac{-\gamma^2{}_3}{4\,(\gamma^2{}_3 - 1}\right) = -1 + \frac{3\,\gamma^2{}_3}{4\,(\gamma^2{}_3 - 1)}$$

3.24 3.25

$$\beta_o = \frac{-4\,(\gamma^2{}_3 - 1) + 3\,\gamma^2{}_3}{4\,(\gamma^2{}_3 - 1)} = \frac{-\gamma^2{}_3 + 4}{4\,(\gamma^2{}_3 - 1)}$$

$$\beta_o = \frac{4 - \gamma^2{}_3}{4\,(\gamma^2{}_3 - 1)}$$

Referencia 4. Subsistema de curvas mesocúrticas:

4.1 $$\frac{D_{\delta}y}{y} = \frac{\delta + \alpha}{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2\delta^2}$$

4.2 $$\frac{D_{\delta}y}{y} = \frac{\delta + \alpha}{\beta_0 + \beta_1\delta + \delta^2}$$

4.21

$$\beta_0 + \beta_1\delta + 3\delta^2 = 3\left(\delta - \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 12\,\beta_0}}{6}\right)\left(\delta + \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 12\,\beta_0}}{6}\right)$$

4.22 $$= 3\,(\delta - (B + C)\ (\delta - (B - C)$$

4.23 $$B = -\frac{\beta_1}{6}$$

4.24 4.25

$$6\,B = -\beta_1 = \alpha$$

4.3 $$\frac{D_{\delta}y}{y} = \frac{\delta + 6\,B}{3\,/\delta - B - C/\ \ /\delta - B + C/}$$

Referencia 4.3. Especificación de la fórmula cuando C es real[1]:

4.3 $$\frac{D\,y}{y} = \frac{\delta + 6\,B}{3\,/\delta - B - C/\ \ /\delta - B + C/}$$

4.31 $$\delta - B = \zeta$$

4.32 $$\delta = \zeta + B$$

4.33 $$\delta + 6B = \zeta + 7\,B$$

4.4 $$\frac{D_{\delta}y}{y} = \frac{\delta + 7\,B}{3\,/\zeta - C/\ \ /\zeta + C/}$$

[1] En el texto se hace referencia a δ-B como equivalente a theta (Θ ó ϑ). Por un error de imprenta se ha substituido en todo lo siguiente ϑ por ζ lo cual no afecta al fondo de los desarrollos aunque si a la congruencia entre las dos porciones textual y gráfica de esta nota.

4.5 $$\frac{Dy}{y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{C - 7B}{2C} \cdot \frac{1}{\zeta + C} + \frac{1}{3} \cdot \frac{C + 7B}{2C} \cdot \frac{1}{\zeta - C}$$

4.6 $$\text{Log } y = \frac{C - 7B}{6C} \text{Log}(\zeta + C) + \frac{C + 7B}{6C} \text{Log}(\zeta - C) + \text{Con}$$

4.7 $$y = e^{\text{costante}} (\zeta + C)^{\frac{C - 7B}{6C}} (\zeta - C)^{\frac{C + 7B}{6C}}$$

Referencia 4.4. Especificación de la fórmula cuando C es nula:

4.41 $$\text{Log } y = \int \left(\frac{\delta + 6B}{3(\delta - B)^2} \right) d\zeta = \int \left(\frac{1}{3} \frac{\zeta + 7B}{\zeta^2} \right) d\zeta$$

4.51 $$\text{Log } y = \frac{1}{3/} \left(\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{7B\, d\zeta}{\zeta^2} \right) d\zeta$$

4.61 $$\text{Log } y = \frac{1}{3} \left(\text{Log } \zeta - \frac{7B}{\zeta} \right) + \text{Constante.}$$

4.71 $$y = y' \zeta^{1/3} e^{-7B/\zeta}$$

Referencia 4.5. Especificación cuando C es imaginaria:

4.42 4.421

$$\frac{D\delta y}{y} = \frac{\zeta + 7B}{3(\zeta + Ci)(\zeta - Ci)} = \frac{\zeta + 7B}{3(\zeta^2 + C^2)}$$

4.52 $$\text{Log } y = \int \frac{\zeta + 7B}{3(\zeta^2 + C^2)} d\zeta =$$

4.521 $$= \int \frac{\zeta\, d\zeta}{3(\zeta^2 + C^2)} + \int \frac{7B\, d\zeta}{3(\zeta^2 + C^2)}$$

4.62 $$\text{Log } y = \frac{1}{2 \times 3} \text{Log}(\zeta^2 + C^2) + \frac{7B}{3C} \tan^{-1} \frac{\zeta}{C} + \text{Constante}$$

4.72 $$y = y' (\zeta^2 + C^2)^{1/6} e^{\frac{7B}{3C} \tan^{-1} \frac{\zeta}{C}}$$

Referencia 5.:

5.1 $$y = y' (\zeta + C)^{F_2} (\zeta - C)^{F_1}$$

5.11 $$z = \frac{C + \zeta}{2\,C}$$

5.12 $$C + \zeta = 2Cz$$

5.13 $$\zeta = C\,(2z - 1)$$

5.14 $$\zeta - C = C\,(2z - 1 - 1) = = 2C\,(z - 1)$$

5.2 $$y = y' (-1)^{F_1} (2Cz)^{F_2} /2C\,(1 - z)/^{F_2}$$

5.3 $$\Sigma f = y'' \int (2C)^{F_1} (2C)^{F_2} (1 - z)^{F_2}\, 2Cdz$$

5.4 $$\Sigma f = y'' (2C)^{F_1} (2C)^{F_2} \int z^{F_1} (1 - z)^{F_2}\, 2Cdz$$

5.5 $$\Sigma f = y'' (2C)^{F_1 + F_2 + 1} \int_0^1 z^{F_1} (1 - z)^{F_2}$$

5.6 $$\Sigma f = y'' (2C)^{F_1 + F_2 + 1} B\, /(F_1 + 1),\ (F_2 + 1)/$$

5.7 $$y'' = \frac{\Sigma f}{(2C)^{F_1 + F_2 + 1}} \; \frac{1}{B\, /(F_1 + 1), (F_2 + 1)/}$$

5.8 $$y'' = \frac{\Sigma f}{(2C)^{F_1 + F_2 + 1}} \; \frac{\Gamma\,(F_1 + F_2 + 2)}{\Gamma\,(F_1 + 1)\quad \Gamma\,(F_2 + 1)}$$

Referencia 5.9:

5.91 $$F_1 + F_2 + 1 = \frac{C - 7B}{6C} + \frac{C + 7B}{6C} + 1 =$$

$$\frac{2C + 6C}{6C} = \frac{4}{3}$$

5.92 $$F_1 + F_2 + 2 = \frac{C - 7B + C + 7B + 12C}{6C} = \frac{7}{3}$$

5.93 $$F_1 + 1 = \frac{C - 7B}{6C} + 1 = \frac{C - 7B + 6C}{6C} = \frac{7(C - B)}{6C}$$

5.94 $$F_2 + 1 = \frac{C + 7B}{6C} + 1 = \frac{C + 7B + 6C}{6C} = \frac{7(C + B)}{6C}$$

6. $$y' = \frac{\Sigma f}{(2C)^{4/3}} \frac{\Gamma(7/3)}{\Gamma\left(\frac{7(C - B)}{6C}\,\Gamma\,\frac{7(C + B)}{6C}\right)}$$

4.71 $y = y^1 \zeta^{1/3} C - 7 B/\zeta$

5.11 $\Sigma y = y^1 \int \zeta^{1/3} e^{-7 B/\zeta} d\zeta$

5.111 $\frac{7B}{\zeta} = z$

5.112 $\zeta = \frac{7B}{z} = 7 Bz^{-1}$

5.113 $d\zeta = \frac{7B}{z^2} dz = 7 Bz^{-2} dz$

5.21 $\Sigma y = y' \int \left(7 Bz^{-1} \right)^{1/3} e^{-z} (7 Bz^{-2} dz)$

5.31 $\Sigma y = y' (7B)^{-1/3} + 1 \int z^{-1/3} - 2 e^{-z} dz$

5.41 $\Sigma y = y' (7B)^{2/3} \Gamma(-7/3 + 1)$

5.51 $y' = \frac{\Sigma y}{(7B)^{2/3}} \frac{1}{\Gamma(-4/3)}$

4.72 $$y = y' (\zeta^2 + C^2)^{1/6}\, e^{\frac{7B}{3C} \tan^{-1} \frac{\zeta}{C}}$$

5.12 $$\Sigma y = y' \int (\zeta^2 + C^2)^{1/6}\, e^{b \tan^{-1} \frac{\zeta}{C}}\, d\zeta$$

5.121 $$\tan^{-1} \frac{\zeta}{C} = z$$

5.122 $$\frac{\zeta}{C} = \tan z \qquad \zeta = C \tan z$$

5.123 $$d\zeta = C \cos^{-2} z\, d\, z$$

5.32 $$\Sigma y = y' C^{1/3} \int (\tan^2 z + 1)^{1/6}\, e^{bz}\, C \cos^{-2} z\, d\, z$$

5.42 $$\Sigma y = y^1 C^{1\,1/3} \int \sec^{1/3} z\, e^{bz} \cos^{-2} z\, d\, z$$

$$\Sigma y = y^1 C^{4/3} \int \cos^{-1/3} z\, e^{bz} \cos^{-2} z\, d\, z$$

5.52 $$\Sigma y = y^1\, C^{4/3} \int \cos^{-1/3} z\, e^{bz}\, dz$$

$$90^{\circ} - z = y \qquad z = 90^{\circ} - y$$

5.521 Si $z = 90^{\circ}$
$y = 90^{\circ} - 90^{\circ} = 0^{\circ}$

5.522 Si $z = -90^{\circ}$

5.523 $y = 90^{\circ} - (-90^{\circ}) = 180^{\circ}$

5.5231 $\cos z = \operatorname{sen} y$

5.524 $dz = d\,(90^{\circ} - y) = -dy$

5.62 $$\Sigma y = y'\, C^{4/3} \int \operatorname{sen}^{-1/3} y\, e^{b\,(90^{\circ} - y)}\, dy$$

5.72 $$\Sigma y = y^1 \, C^{4/3} \, e^{90° \, b} \int_{0°}^{180°} \text{sen}^{-7/3} \, y \, e^{-by} \, dy$$

5.82 $$y'' = \frac{\Sigma y}{\int_{0°}^{180°} \text{sen}^{-7/3} \, y \, e^{-by} \, dy}$$

en la cual $y'' = y' \, C^{4/3} \, C^{90°} \, b$