Notas Estadístico-Sociales

LOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA PEARSONIANA

ÚTILES PARA LA DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICO-SOCIAL

Por Óscar URIBE VILLEGAS

El sistema pearsoniano de curvas de frecuencia está constituido por un conjunto de funciones de distribución, representadas, en su forma diferencial, por la ecuación de la referencia 1.

Las formas o tipos principales del sistema se obtienen cuando el denominador es el trinomio de segundo grado, completo (o sea, cuando en el denominador existen tres términos: en equis cuadrada, en equis a la primera y en equis a la potencia cero, lo que equivale a decir que lo es cuando tanto *b* subíndice dos como *b* sub-uno y *b* sub-cero son diferentes de cero).

Las formas o tipos transicionales se producen cuando el denominador es de segundo grado (o sea, cuando existe término en equis cuadrada, que vale tanto como decir que *b* sub-dos es diferente de cero) pero NO es un trinomio. Esto ocurre cuando:

1º—o falta el término en equis (o sea, que *b* sub-uno es igual a cero),
2º—o falta el término en equis a la potencia cero (es decir, que *b* sub-cero es igual a cero),
3º—o faltan ambos términos en equis y en equis a la cero (i. e. que *b* sub-uno y *b* sub-cero son nulos). Este último caso puede verse también como propio de una forma o tipo secundario del sistema.

Las formas o tipos decadentes o vestigiales aparecen cuando el denominador NO es de segundo grado, sino de un grado inferior al segundo (de primer grado o de grado cero). Esto ocurre cuando no existe término en equis cuadrada (o sea, cuando *b* sub-dos es nulo). El denominador puede ser, entonces:

1º o un binomio de primer grado ($b_0 + b_1x$)
2º—o un monomio de primer grado (b_1x)
3º—o un monomio de grado cero (b_0) que es una constante.

Las formas vestigiales y transicionales han sido ya objeto de referencias previas en estas páginas. De ahí que intentemos ocuparnos ahora de los tipos principales de curva pearsoniana. Estos tipos resultan de la discusión de una ecuación: la que se forma al igualar a cero el trinomio de segundo grado, del denominador, conforme aparece en la referencia 1.1.

Los tipos principales de curva pearsoniana se producen cuando en la fórmula de las raíces, reproducida en la referencia a 1.2, el radical es diferente de cero. Esto equivale a decir que los tipos pearsonianos principales se producen cuando el cuadrado de *b* sub-uno es diferente del producto de *b* sub-cero y *b* sub-dos multiplicado por cuatro (referencia 1.3). "Diferente", en este caso, significa:

1º—o diferente en valor,
2º—o diferente en signo,
3º—o diferente en valor y en signo.

Si son diferentes entre sí, en valor, aunque sean de igual signo, los términos correspondientes producirán una resta distinta de cero. Si los dos términos del subradical difieren en signo (difieran o no en valor), la resta se convertirá en una suma de positivos y, consiguientemente, no será nula. Si ambos difieren entre sí en valor y en signo —conjuntamente— con doble razón, la resta no podrá anularse.

La anulación del radical produciría tipos secundarios de curva. Estos no se estudiarán, de inmediato, para conservar, en lo posible, la nitidez de estos delineados.

Descomposición del trinomio en factores.—El trinomio de segundo grado puede descomponerse en tres factores, de los cuales:

1.—el primero estará dado por el coeficiente de la segunda potencia de la variable (*b* sub-dos) como muestra la referencia 2.1.
2.—el segundo por equis menos la primera de las raíces (o sea, aquélla en la que el radical aparece con signo positivo) según aparece en la referencia 2.2.
3.—el tercero, por equis menos la segunda de las raíces (en la que el radical va precedido de signo menos), según puede verse en la referencia 2.3.

O sea, que si representamos a $b_1/2b_2$ (*b* sub-uno entre 2 veces *b* sub-dos) por *B* (b mayúscula) de acuerdo con la referencia 2.4., y al radical dividido entre 2 veces *b* sub-dos por *R* (erre mayúscula), tendremos, como representación del trinomio, la fórmula de la referencia 2.5.

Discusión de la fórmula.—Los tipos principales de curva pearsoniana se relacionan con el valor de erre mayúscula. Erre mayúscula puede ser real o puede ser imaginario (alternativas compatibles con la condición —ya especificada— de que *R* sea distinto de cero). Si *R* es real, la anterior referencia basta, sin modificación, para el caso particular. Si *R* es imaginario, la solución anterior puede especificarse como lo indica la referencia 3.1.

Si se desea simplificar, estas fórmulas se pueden escribir como se indica en las referencias 3.2. y 3.3. En estas nuevas referencias, figura una nueva variable, equis mayúscula (*X*) cuya equivalencia con la antigua (equis manúscula) queda dada por la expresión de la referencia 3.4. *R*, por su parte (válida para ambas expresiones, ya no genéricas, sino específicas), es igual a la raíz cuadrada del VALOR ABSOLUTO de la diferencia entre el cuadrado de *b* sub-uno y cuatro veces el producto de los otros dos coeficientes *b* (*b* sub-cero y *b* sub-dos) dividida —dicha raíz— entre el duplo de *b* sub-dos. Referencia 3.5.

Con vistas a los desarrollos ulteriores, en cuanto se ha cambiado variable en el denominador (equis mayúscula en vez de equis minúscula), conviene hacer un cambio semejante en el numerador. Para ello, puede sumarse y restarse del numerador, B (b mayúscula), con lo que éste no se altera y, en seguida, pueden hacerse dos substituciones:

1ª—Equis minúscula más be mayúscula ($x + B$) puede substituirse por X (equis mayúscula) conforme a la expresión ya conocida, y
2ª—Menos be mayúscula más a minúscula ($- B + a$) puede representarse (en cuanto suma algebraica de constantes) por otra constante, a mayúscula (A).

Las referencias de la 3.31 a la 3.34 dan cuenta de estas substituciones.

Integración de la fórmula.—Con el fin de salir de las relaciones entre derivadas que quedaron expresadas por la referencia inicial 1, debe procederse a la integración de ambos miembros con respecto a x, tal y como queda indicado en la referencia 4.1.

Como la integral con respecto a x, de la derivada respecto a x del logaritmo de y es el propio logaritmo de y (ya que los operadores opuestos anulan sus efectos) es posible escribir la referencia 4.2.

Para la integración del segundo miembro, procederemos en forma distinta, según las raíces sean reales o complejas (según que el radical sea real o imaginario, o sea, según que en la fórmula específica aparezca R ó aparezca Ri).

Integración cuando las raíces son reales.—Cuando las raíces son reales, puede tomarse como punto de partida la expresión 3.2, que, gracias a las substituciones de las referencias 3.31 a 3.34 se convierte en la 4.3 por integrar.

Para integrar la expresión (referencia 4.31) conviene, comenzar por sacar a b subdos (que figura como factor en el denominador) del signo de integración (ya que un factor constante no se altera al entrar o salir del integrador). Por ello, en la referencia 4.31, figura uno sobre b sub-dos como factor de la expresión por integrar.

Para integrar la expresión que en el segundo miembro queda bajo el integrador, es conveniente dividir la fracción total en dos fracciones parciales. Estas fracciones —según se sabe— tendrán por denominadores cada uno de los dos factores que figuran en el denominador de la fracción originaria (equis mayúscula más erre mayúscula) y (equis mayúscula menos erre mayúscula), y sus numeradores se determinarán por el procedimiento delineado en la referencia 4.33, que subsigue a la igualdad 4.32; ésta muestra —por su parte— la equivalencia entre la fracción originaria y la suma de las dos fracciones parciales, cuyos numeradores (que hemos designado por las mayúsculas D y E) desconocemos.

La descomposición poduce dos fracciones que tienen por denominadores $2R(X + R)$ y $2R(X - R)$, y por numeradores $(R - A)$ y $(R + A)$ respectivamente, como se muestra en las referencias 4.34 y 4.35.

Restituido el equivalente de la integral del primer miembro y de la del segundo, se obtiene la 4.36, en cuyo primer miembro figura el logaritmo natural de y, en tanto que en el segundo miembro se encuentra el factor uno sobre b sub-dos afectando a la integral de una suma de fracciones.

La suma de fracciones se reducirá a la suma de las integrales de los sumandos. Estas integrales, al ser substituídas por sus resultados, darán la referencia 4.37.

El segundo miembro de esta última referencia está constituído:

1.—por el factor común uno sobre b sub-dos, y
2.—por un factor binomio en el que los términos son los integrales de las fracciones parciales.

Los integrales de las fracciones parciales, a su vez, lo son de CONSTANTES ($R - A$ en un caso y $R + A$ en el otro) divididas entre VARIABLES ($X + R$ en un caso y $X - R$ en el otro) y, por lo mismo, dan como resultado dos productos de idéntica estructura: las constantes aparecen —en ellos— como coeficientes de los logaritmos naturales de las variables que figuran en el denominador respectivo.

La expresión resultante (4.37) está dada en forma logarítmico-natural. Para pasar del nivel logarítmico al no-logarítmico es necesario tomar las exponenciales correspondientes al primero y al segundo miembro e igualar los resultados:

1.—La exponencial del logaritmo de y es e (la base de los logaritmos naturales) elevado al logaritmo natural de y; pero, la base de un sistema de logaritmos elevado al logaritmo de una cantidad en ese sistema (y, en el caso) es igual a la cantidad. O sea, que el primer miembro será y.

2.—En cuanto al segundo miembro de la nueva expresión (referencia 4.38) será igual a e (base logarítmico-natural) elevado a todo el segundo miembro de la anterior (referencia 4.37),
O, también, será igual al producto de tres factores exponenciales, constituído cada uno por e, elevado a cada uno de los términos del segundo miembro de la 4.37, según lo muestra la 4.39.

Finalmente, por consideraciones análogas a las que se hicieron para el primer miembro, cada factor exponencial del segundo se puede substituir por el valor que aparece sujeto a logaritmación en el exponente ($X + R$ y $X - R$ respectivamente, y $C.$, constante de integración) elevado a una potencia igual a la que aparece en el coeficiente de dicho exponente.

De este modo, se puede pasar de la 4.39 a la 4.4, en la que y^* reemplaza a e elevado a la constante de integración que figuraba en las dos referencias anteriores.

La expresión 4.4 nos da las relaciones entre las ordenadas y las abscisas de la primera curva principal del sistema pearsoniano.

Integración cuando las raíces son complejas.—Lo que se necesita integrar, en este caso, en el segundo miembro, es la expresión de la referencia 4.5, en cuyo denominador figuran, como puede notarse, dos factores complejos pues en cada uno de ellos existe un término real (equis mayúscula, X) y uno imaginario (Ri afectado de signo más en un caso, y de signo menos en el otro), en el que interviene i, unidad imaginaria (igual a la raíz cuadrada de menos 1, $\sqrt{-1}$).

Si se ejecuta la multiplicación de los factores segundo y tercero del denominador de la referencia 4.5 (o sea, si se multiplican entre sí los complejos conjugados) se obtiene una *suma* de cuadrados de la partes reales (cuadrado de las equis mayúsculas, X^2) y de los coeficientes de las partes imaginarias (cuadrado de las erres mayúsculas, coeficientes de Ri, o sea R^2). En caso de duda, respecto de este resultado, puede ejecutarse la operación de $(X + Ri)$ por $(X - Ri)$ y substituir en el producto $(X^2 - R^2i^2)$ el valor de i^2(i cuadrado) o sea, de la raíz de menos uno al cuadrado (igual a menos uno).

Para integrar, recordamos la anulación de las influencias de integrador y derivador aplicados a la misma función y referidos a la misma variable, en el primer miembro. Esta anulación de efectos reduce al primer miembro al logaritmo natural de y. En el segundo miembro, a más de sacar al factor constante uno sobre b sub-dos del integrador, descompusimos la fracción del integrando $X + A$ sobre $X^2 + R^2$ en dos fracciones de igual denominador $(X^2 + R^2)$ y cuyos numeradores fueran los términos de la originaria (X numerador de la primera y A numerador de la segunda) y a cada facción resultante la afectamos del integrador, como se registra en la referencia 4.52.

El integral de la primera fracción lo es de una variable X (equis mayúscula), dividida entre la suma del cuadrado de la misma y el cuadrado de una constante y, por lo mismo, equivale al logaritmo natural del denominador dividido —el logaritmo— entre dos, exponente de la variable en el denominador.

El integral de la segunda fracción, por su parte, lo es de una fracción cuyo denominador está formado por una suma de cuadrados de variable y constante y cuyo numerador —a diferencia de lo que ocurrió en la fracción anterior— es NO variable, sino una constante. La constante del numerador se puede considerar que sale del integrador y, en cuanto al resto, es una integral bien conocida que produce el arco cuya tangente está dada por el cociente resultante de dividir la variable y la constante que figuran en el denominador, dividido —el arco cuya tangente es ésa— entre la constante del denominador. Si se considera, además, que hay una constante de integración, se explica fácilmente el resultado obtenido en la 4.53.

Para pasar de la expresión logarítmica a la expresión dada en números naturales, sólo hay que tomar antilogaritmos de la misma base (o sea, que hay que exponenciar). De ahí que el logaritmo del primer miembro, exponenciado, se reduzca a y; que, en el segundo miembro, podamos representar el factor correspondiente a la constante de 4.35 por y'; que el término logarítmico del segundo miembro se convierta en la expresión $(X^2 + R^2)$ (que aparecía logaritmada) elevada a una potencia igual al coeficiente uno entre el duplo de b sub-dos, y que, finalmente, el segundo término del segundo miembro, que no está afectada por el logaritmador, equivalga a una exponencial en la que el término al que nos referimos aparezca como exponente de e, base de los logaritmos naturales, según se expresa en la 4.54.

Fórmulas de los parámetros.—Para encontrar los valores de los parámetros de las fórmulas con las que hemos venido trabajando, necesitaremos cuatro ecuaciones simultáneas con cuatro incógnitas pues son cuatro los parámetros elementales de la ecuación principal de Pearson (a, b sub-cero, b sub-uno y b sub-dos).

Estas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas pueden obtenerse de las referencias 5.0, si las ecuaciones anotadas en ellas se reducen a modo de que sólo contengan los términos en los que figuren los parámetros elementales a, b sub-cero, b sub-uno, b sub-dos y, por otra parte, se eligen sólo las cuatro primeras ecuaciones.

Elegidas las cuatro primeras, y reducidas a modo de contener sólo los cuatro primeros términos, las ecuaciones resultantes se simplificarán si en vez de tomar los momentos respecto a una media arbitraria, se toman los momento con respecto a la media aritmética, ya que esto anula todos los términos en los que figura el primer momento, y reduce a la unidad todos los momentos de orden cero que figuren en estas ecuaciones.

Es de este modo como las nuevas referencias las designaremos por 5.1 y por 5.2. Las ecuaciones de la referencia 5.2 constituyen un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas con cuatro incógnitas (los parámetros a, b sub-cero, b sub-uno y b sub-dos), que se simplifica considerablemente si se despeja al parámetro a de la 5.21 y a b sub-cero de la 5.22.

La referencia 5.31 expresa, así, que el parámetro a no es sino el simétrico del parámetro b sub-uno (es igual a él, pero de signo contrario). La 5.32 da el equivalente de *b* sub-cero en términos del segundo momento central (*mu* sub-dos) y del parámetro *b* sub-dos.

La substitución de *a* por su equivalente menos *b* sub-uno (referencia 5.31) y la reducción de los dos primeros términos semejantes de la 5.411 permite escribir la 5.412.

La substitución de los parámetros *a* y *b* sub-cero por sus equivalentes, tomados de 5.31 y 5.32 en la ecuación 5.24 produce la 5.421 que, por reducción de lòs términos semejantes en *b* sub-uno y *b* sub-dos produce la 5.423 que, finalmente, mediante el paso de menos 3 *mu* sub-dos al cuadrado ($-3\mu_2{}^2$) al segundo miembro, produce la 5.424.

Las ecuaciones 5.412 y 5.424 forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (los parámetros *b* sub-uno y *b* sub-dos). Para resolverlo, recurriremos a determinantes. El valor de *b* sub-uno está dado por una fracción cuyo denominador es el eliminante del sistema (formado por los coeficientes de *b* sub-uno y *b* sub-dos, tomados en su orden) y cuyo numerador es el determinante obtenido de substituir en el eliminante los coeficientes de *b* sub-uno por los términos independientes (o sea, de substituir 2 *mu* sub-dos y 3 *mu* sub-tres por menos *mu* sub-tres y 3 *mu* sub-dos al cuadrado menos *mu* sub-cuatro ($2\mu_2$ y $3\mu_3$ por $-\mu_3$ y $3\mu_2{}^2 - \mu_4$). Este valor se consigna en la 5.511.

Substituidos los determinantes por sus valores en la 5.512, reducidos los términos semejantes del numerador de la 5.513, tras de sacar a *mu* sub-tres como factor común del numerador, se obtiene la expresión 5.513 que da el valor del parámetro *b* sub-uno.

Para obtener el valor del parámetro *b* sub-dos, se recurre al mismo eliminante; o sea, que el denominador será igual al del parámetro *b* sub-uno. Como numerador de la fracción correspondiente se utiliza el determinante que resulta de substituir los coeficientes de *b* sub-dos (parámetro que se busca) por los términos independientes (que ahora aparecen en la segunda columna), según muestra la referencia 5.521.

Substituido el determinante del numerador por su valor, se obtiene la expresión 5.522, en la que *D* representa el valor de la referencia.

Obtenidos, los valores de *b* sub-uno y *b* sub-dos, el valor del parámetro *a* se obtiene fácilmente, pues ya hemos encontrado que es el simétrico de *b* sub-uno; o sea, que será igual al valor de 5.513 afectado de signo negativo, según aparece en la 5.53.

El valor de *b* sub-cero, transcrito de la 5.32 se consigna en la 5.541. La substitución de *b* sub-dos, por su valor encontrado en la 5.522 produce la 5.542.

Al ejecutar la suma de dentro del paréntesis, se obtiene la 5.543 que, mediante la reducción de sus términos semejantes (eliminación de los términos en *mu* sub-dos al cubo por tener el mismo coeficiente 18 y signos opuestos) produce la 5.544 en la que está consignado el valor del parámetro *b* sub-cero de la ecuación de Pearson.

Los valores de los cuatro parámetros elementales de la ecuación de Pearson los hemos tabulado ordenadamente en la 5.6.

Obtención del parámetro y'.—El parámetro y' del sistema pearsoniano procede, como puede recordarse, de la constante de integración. Dicha constante de integración —cuando se pasa de las expresiones logarítmicas a las expresiones naturales— se convierte en el exponente de un factor exponencial cuya base es *e*. De este modo, si la constante de integración la representamos por *C, y'* es igual a *e* (base de los logaritmos naturales (elevada a la *C*. El valor de *e* a la *C* o de *y'* se determina fácilmente si se considera que la integral del segundo miembro de la ecuación pearsoniana es igual a la suma de todas las probabilidades, y que la suma de estas, en una función de distribución es igual a 1; o que la suma es igual al efectivo de la distribución.

De ahí que sea factible obtener, para cada curva del sistema pearsoniano, un valor de y' que procede de:

1º—la integración del segundo miembro de la ecuación correspondiente,
2º—la igualación de esa integral con el efectivo de la distribución, y
3º—el despeje de y' de la expresión resultante.

Obtención de y' cuando las raíces son reales.—Si, con fines de simplificación, representamos los exponentes que figuran en la expresión 4.4 por m (eme minúscula) y M (eme mayúscula), tendremos fácilmente la igualdad de la referencia 6.1.

Al integrar ambos miembros de la 6.1, se obtiene, en el primer miembro, la suma de las frecuencias o efectivo de la distribución. En el segundo miembro se tendrá la integral de un producto de tres factores: uno de ellos, constante (y') y dos de ellos variables (o sean los binomios $X+R$ y $X-R$ elevados respectivamente a las potencias m y M). Figura, además, un factor diferencial (dX) que indica cuál es el referente de la integración. Esta integral tiene —además— como límites $+R$ y $-R$, como se indica en el integrador de la referencia 6.11.

Como y' es un factor constante, puede entrar o salir del integrador de la 6.11 sin alterarse. Es por ello por lo que, al sacarlo del integrador, se pudo escribir la referencia 6.12.

Si igualamos $(R+X)/2R$ a Z (erre más equis mayúscula sobre el duplo de R, igualado a Z) conforme lo indica la referencia 6.131, al despejar sucesivamente a $R+X$ y a X, obtenemos las equivalentes 6.32 y 6.133. La diferencial de esta última nos produce la 6.134. Finalmente, para obtener la 6.135, sumamos y restamos R a $X-R$ (que, por lo mismo, no se altera); pero, como $R+X$ es igual a $2RZ$ (6.132), es posible escribir, como tercer eslabón de la cadena de igualdades, 6.135, $2RZ-2R$ que, al sacar como factor común a $2R$, produce, como último eslabón de la cadena, $2R(Z-1)$.

Si a la 6.12 la transformamos en la 6.121, no se altera. En efecto, la inversión del minuendo y el substraendo del paréntesis $X-R$, que se convierte en $R-X$ equivale a la multiplicación del paréntesis por -1, o sea, a la multiplicación de la ponencia correspondiente por (-1) elevado a la potencia M. Este es un factor constante que afecta al integrando y que puede salir del integrador. En la 6.121 lo hemos hecho salir, sin producir modificación.

Para poder hacer la substitución correspondiente en la 6.121, cambiaremos signos en la 6.135, y de este modo obtendremos la 6.1351.

La substitución de la antigua variable X, por la nueva variable Z, impone un cambio en los límites de la integral. Para calcular los nuevos límites, tomaremos la 6.133 y substituiremos en ella X por R, límite superior; al despejar a Z, de acuerdo con la 6.133, tendremos como nuevo límite superior 1. En forma parecida, si en la 6.133 tomamos en vez de X, $-R$ antiguo límite inferior, la substitución produce la 6.1333, de la que se obtiene finalmente, de acuerdo con la 6.1335, como nuevo límite inferior, cero.

Si en la 6.121 se substituyen $X+R$ y $R=X$ por sus valores, obtenidos en las expresiones 6.132 y 6.1351, se obtiene la expresión 6.122, en donde aparece también el valor $2RdZ$ tomado de la 6.134, equivalente del antiguo diferencial (dX). Los límites de la integral son los recién calculados: 0 y 1.

En la 9.122 figuran en el integrando varios factores $2R$ elevados a diferentes potencias m, M, 1. Todos estos factores pueden agruparse si se toma $2R$ y se eleva a la suma de los exponentes $m+M+1$. El resultado se consigna en la 6.123.

Como $2R$ elevado a $m + M + 1$ es un factor constante, puede salir del integrador sin alterarse.

Por definición, el nuevo integral entre 0 y 1 de z a la m por $(1 - Z)$ a la M por dZ se conoce como la función Beta mayúscula (B). En efecto, esta función se caracteriza por:

1.—Ser una integral definida,
2.—cuyos límites son cero y uno,
3.—cuyo integrando está formado por tres factores:

a.—el primero de los cuales es una variable potenciada,
b.—el segundo de los cuales es el complemento aritmético de dicha variable, elevado a una potencia distinta de aquella a la que estaba elevada la variable en el primer factor, y
c.—el tercero de los cuales (referente de integración) es el diferencial de la variable.

La especificación de la función beta mayúscula se hace mediante la mención de los exponentes a los que están elevados la variable —por una parte— y su complemento aritmético —por la otra— adicionados, cada uno de ellos, de una unidad. Hacia esto llama la atención la referencia 6.1250 que nos permite que escribamos como equivalente de la 6.124 la 6.1251, en donde aparece la función beta mayúscula de $m + 1$ y $M + 1$.

Si se despeja a y' de la expresión 6.1251, se obtiene la 6.126, en la cual aparece el efectivo en el numerador de una fracción, en tanto que el otro factor fraccionario está dado por el recíproco de la función beta mayúscula de $m + 1$ y $M + 1$.

Existe otra función conocida como la función gamma mayúscula (Γ) cuyas relaciones con la función beta mayúscula quedan dadas por la expresión 6.1270. De acuerdo con ella, la función beta mayúscula de dos cantidades A y B es igual a la relación que existe entre el producto de las funciones gamma mayúscula de cada una de ellas, y la función gamma mayúscula de la suma de esas dos cantidades.

La substitución del equivalente de la función beta mayúscula de $m + 1$ y de $M + 1$ será, por tanto, el cociente que resulta de dividir la gamma mayúscula de $m + 1$ multiplicada por la gamma mayúscula de $M + 1$, entre la gamma mayúscula de $(m + 1) + (M + 1)$, o sea, entre la gamma mayúscula de $m + M + 2$. Como la función beta mayúscula figura en el denominador de la expresión 6.126, en la 6.127 (obtenida por substitución del valor de la función de beta en términos de las funciones gamma) aparecerá en el numerador el producto de las funciones gamma de $m + 1$ y $M + 1$ y en el denominador, la función gamma de $m + M + 2$. Esta última expresión nos da, finalmente, el valor del parámetro y' para el caso de las raíces rales de la expresión de Pearson.

Obtención de y' cuando las raíces son complejas.—Transcribimos la fórmula del caso en la referencia 7.3. Si dividimos el binomio del paréntesis entre R al cuadrado, esto equivaldrá a dividir la potencia correspondiente entre erre mayúscula al cuadrado elevada a la potencia n; o sea, que equivaldrá a dividir entre erre mayúscula a la $2n$. Para la expresión no se altere, será indispensable multiplicar por esa misma cantidad (R a la $2n$) como se indica en la 7.311.

Si el ángulo cuya tangente es equis mayúscula sobre erre mayúscula lo representamos por alfa minúscula (α), como lo indica la 7.321, equis mayúscula sobre erre mayúscula será igual a la tangente de alfa minúscula (referencia 7.322).

La substitución de los valores de la 7.321 y la 7.322 en la 7.311, permite escribir la 7.312. En ella, la suma de 1 y el cuadrado de la tangente de alfa es igual a la secante cuadrada (7.313). La referencia 7.314 da el equivalente del otro exponente (ene mayúscula por arco cuya tangente es equis entre erre).

Las substituciones correspondientes en la 7.311 nos permiten escribir la 7.32 y 7.33.

Si la tangente de alfa es equis sobre erre según la 7.341, al despejar a equis mayúscula se obtiene la 7.342. Al diferenciar los dos miembros de la 7.342 se obtiene la equivalencia de diferencial de X en la 7.343 que, en cuanto diferencial de una constante por una función es igual a la constante R por la diferencial de la función tangente de alfa (7.344). Como la diferencial de la tangente es el cuadrado de la secante por la diferencial del arco, puede escribirse la 7.345 que, en cuanto se considera que la secante es la recíproca del coseno, se transforma finalmente en la 7.346.

Si integramos la 7.35, obtendremos como primer miembro el efectivo de la distribución y, como segundo, la integral de una serie de factores; de estos, los dos primeros y'' y R son constantes y pueden salir de la integral. La integral del resto tiene por integrando la potencia $2n$ de la secante de alfa, e elevado a ene mayúscula alfa y el equivalente de la diferencial de equis mayúscula tomado de la 7.346. La integral se extiende de entre menos *pi* sobre dos a *pi* sobre dos.

De la 7.35, se puede pasar a la 7.36 sacando a R (del integrando) fuera del integrador, lo cual es posible por ser constante. Dentro de la integral, como la secante de un ángulo es el recíproco de su coseno, puede substituirse la potencia $2n$ de la secante por la potencia menos $2n$ del coseno. Por otra parte, el coseno cuadrado, que aparece en el denominador en 7.36, puede considerarse como la potencia menos dos del coseno. Al efectuar la multiplicación de los cosenos del integrando de la 7.36, se obtiene la potencia menos dos ene minúscula menos dos, conforme aparece en la 7.37.

Si el ángulo alfa se substituye por su complemento (que designaremos por beta minúscula), se producen las transformaciones marcadas con las referencias 7.37 y siguientes. Al pasar de la 7.391 a la 7.392 se sacó e (base de los logaritmos naturales) elevada a ene mayúscula por *pi* sobre dos fuera del integrador (por tratarse de una constante). En la 7.393 el producto de este valor por y'' se representó por y cuarta (y^{iv}) y a la integral se la representó como una función de los exponentes (menos dos ene minúscula menos dos, y ene mayúscula). Esta última transformación es conveniente porque ya hay tablas calculadas para dicha función.

Al despejar a y cuarta se obtiene la referencia 7.4. Esta, en conjunción con las igualdades que relacionan a y cuarta con y tercera (y''') a y tercera con y biprima (y'') y a biprima con y prima (y') permiten el cálculo de esta última cuando las raíces de la ecuación pearsoniana son complejas.

Procedimiento para la interpolación de los dos tipos principales de curva pearsoniana.—El procedimiento de interpolación de estos dos tipos de curva, útiles para la descripción estadístico-social de gran número de distribuciones concretas consiste en los siguientes pasos:

1º—Se calculan lo momentos con respecto a la media aritmética (*mus* sub-uno, sub-dos, sub-tres y sub-cuatro: μ_1, μ_2, μ_3, μ_4).

2º—Se substituyen los valores encontrados, en las fórmulas de los tres parámetros de Pearson (*bes* sub-cero, sub-uno y sub-dos).

3º—Se calcula el cuadrado de be sub-uno, y por otra parte, se calcula el producto de cuatro por b sub-cero por b sub-dos, y se comparan los resultados. Si el primer resultado es mayor que el segundo, se emplea el primer tipo principal de curva; si el primer resultado es menor que el segundo, se emplea el segundo tipo principal de curva pearsoniana. Si son iguales no es utilizable ninguna de los dos tipos principales, sino un tipo secundario.

4º—Mediante substitución de los parámetros en las fórmulas correspondientes, se calcula:

R (erre mayúscula), m (eme minúscula) y M (eme mayúscula) así como y', en el primer tipo de curva.

R (erre mayúscula), n (ene minúscula) y N (ene mayúscula) así como y', en el segundo tipo de curva.

En el segundo tipo, y' implica el cálculo directo de y^{iv} y por pasos sucesivos el de las otras yes hasta obtener y' que es el parámetro que figura en la fórmula de la curva.

5º—Se substituyen estos valores en la fórmula correspondiente del tipo principal de curva pearsoniana que se haya elegido.

Referencia 1.

1

$$D_x y = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

1.1

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = O$$

1.2

$$X = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2b_2}$$

1.3

$$b_1^2 \neq 4 b_0 b_2$$

Referencia 2.

2.1

$$b_2$$

2.2

$$X - \left[\frac{-b_1}{2b_2} + \frac{\sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2} \right]$$

2.3

$$X - \left[\frac{-b_1}{2b_2} - \frac{\sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2} \right]$$

2.4

$$+ \frac{b_1}{2b_2} = \mathrm{B}$$

2.5

$$b_0 + b_1 + b_2 x^2 = b_2 \, (x + B - R) \; (x + B + R)$$

Referencia 3.

3.1

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = b_2\ (x + B - Ri)\ (x + B + Ri)$$

3.2

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = b_2\ (X - R)\ (X + R)$$

3.3

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 = b_2\ (X - Ri)\ (X + Ri)$$

3.4

$$X = x + \frac{b_1}{2b_2}$$

3.5

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{|\,b_1^2 - 4\,b_0\,b_2\,|}}{2b_2}$$

3.31

$$x + a = x + B - B + a =$$

3.32

$$= X - B + a =$$

3.33

$$= X + A$$

3.34

$$A = a - B$$

Referencia 4.

4.1

$$D_x\, Ly = \int_x \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

4.2

$$Ly = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

4.3

$$\frac{X + A}{b_2\,(X - R)\,(X + R)}$$

4.31

$$\frac{1}{b_2} \int_x \frac{X + A}{(X - R)\,(X + R)}$$

4.32

$$\frac{X + A}{(X - R)\,(X + R)} = \frac{D}{X + R} + \frac{E}{X - R}$$

4.33

$$\begin{aligned} X + A &= D\,(X - R) + E\,(X + R) = \\ &= DX - DR + EX + ER = \\ &= X\,(D + E) + ER - DR \end{aligned}$$

$$D + E = 1 \qquad \therefore \qquad D = 1 - E$$

$$ER - DR = A$$

$$R\,(E - D) = A \qquad \therefore \qquad E - D = \frac{A}{R}$$

$$E - 1 + E = \frac{A}{R}$$

$$2E - 1 = \frac{A}{R}$$

$$2E = \frac{A + R}{R} \qquad \therefore \qquad E = \frac{A + R}{2R}$$

$$D = 1 - \frac{A+R}{2R} = \frac{2R - A - R}{2R} = \frac{R-A}{2R}$$

4·34

$$\frac{X+A}{(X+R)\,(X-R)} = \frac{R-A}{2R} + \frac{R+A}{2R}$$

4·35

$$\frac{X+A}{(X+R)\,(X-R)} = \frac{R-A}{2R\,(X+R)} + \frac{R+A}{2R\,(X-R)}$$

4·36

$$\int_x D_x\, Ly = \frac{1}{b_2}\int_X \left[\frac{R-A}{2(X+R)R} + \frac{R-A}{2(X-R)R}\right]$$

4·37

$$Ly = \frac{1}{b_2}\left[\frac{R-A}{2R}\,L(X+R) + \frac{R+A}{2R}\,L(X-R)\right] + C$$

4·38

$$e^{Ly} = e^{\frac{1}{b_2}\left[\frac{R-A}{2R}L(X+R) + \frac{R+A}{2R}L(X-R)\right] + C}$$

4·39

$$e^{Ly} = e^{\frac{1}{b_2}\frac{R+A}{2R}L(X+R)}\; e^{\frac{1}{b_2}\frac{R-A}{2R}L(X+R)'}\; e^{C}$$

4·4

$$y = y\,(X+R)^{\frac{1}{b_2}\frac{R-A}{2R}}\,(X-R)^{\frac{1}{b_2}\frac{R+A}{2R}}$$

4.5

$$D_x\, Ly = \frac{X + A}{b_2(X + Ri)\,(X - Ri)} =$$

4.51

$$= \frac{X + A}{b_2(X^2 + R^2)}$$

4.52

$$Ly = \frac{1}{b_2}\left[\int_X \frac{X}{X^2 + R^2} + \int_X \frac{A}{X^2 + R^2}\right]$$

4.53

$$Ly = \frac{1}{b_2}\left[\frac{L(X^2 + R^2)}{2} + \frac{A}{R}\, tan^{-1}\frac{X}{R}\right] + C$$

4.54

$$y = (X^2 + R^2)^{\frac{1}{2b_2}}\, e^{\frac{A}{Rb_2}\, tan^{-1}\frac{X}{R}}\; y$$

Referencia 5.

5.2

5.21

$$a + b_1 = 0$$

5.22

$$b_0 + 3b_2\mu = -\mu_2$$

5.23

$$a\mu_2 + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = \mu_3$$

5.24

$$a\mu_3 + 3b_0\mu_2 + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$$

5.3

5.31

$$a = -b_1$$

5.32

$$b_0 = -\mu_2 - 3b_2\mu_2 = -\mu_2(1 + 3b_2)$$

5.4

5.411

$$-b_1\mu_2 + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$$

5.412

$$2b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 - -\mu_3$$

5.421

$$-b_1\mu_3 - 3_2\mu^2 (1 + 3b_2) + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$$

5.422

$$3b_1\mu_3 - 3\mu_2^2 - 9b_2\mu_2^2 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$$

5.423

$$3b_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + b_2 (5\mu_4 - 9\mu_2^2) = -\mu_4$$

5.424

$$3b_1\mu_3 + b_2 (5\mu_4 - 9\mu_2^2) = 3\mu_2^2 - \mu_4$$

5.5

5.412

$$2b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$$

5.424

$$3b_1\mu_3 + b_2\,(5\mu_4 - 9\mu_2^2) = 3\mu_2^2 - \mu_4$$

5.510

$$\begin{vmatrix} 2\mu_2 & 4\mu_3 \\ 3\mu_3 & 5\mu_4 - 9\mu_2^2 \end{vmatrix} = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2 = D$$

5.511

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_3 & 4\mu_3 \\ 3\mu_2 - \mu_4 & 5\mu_4 - 9\mu_2^2 \end{vmatrix}}{D}$$

5.512

$$b_1 = \frac{-5\mu_3\mu_4 + 9\mu_3\mu_2^2 - 12\mu_3\mu_2^2 + 4\mu_3\mu_4}{D}$$

5.513

$$b_1 = \frac{-1\mu_3\mu_4 - 3\mu_3\mu_2^2}{D}$$

5.131

$$b_1 = \frac{-\mu_3\,(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{D}$$

5.521

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2\mu_2 & -\mu_3 \\ 3\mu_3 & 3\mu_2^2 - \mu_4 \end{vmatrix}}{D}$$

5.522

$$b_2 = \frac{6\mu_2^3 - 2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2}{D}$$

5.53

$$a = -\left(\frac{-\mu_3\,(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{D}\right) = \frac{\mu_3\,(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{D}$$

5.541

$$b_0 = -\mu_2\,(1 + 3b_2)$$

5.542

$$b_0 = -\mu_2 \left(1 + 3 \frac{6\mu_2^3 - 2\mu_2\mu_4 + 3\mu_3^2}{D} \right) =$$

5.543

$$= -\mu_2 \left(\frac{10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2 + 18\mu_2^3 - 6\mu_2\mu_4 + 9\mu_3^2}{D} \right)$$

5.544

$$b_0 = -\mu_2 \left(\frac{4\mu_2\mu_4 + 3\mu_3^2}{D} \right)$$

Referencia 6.

6.1

$$y = y' (X + R)^m (X - R)^M; \; y = \Sigma f, \; y' = e^c$$

6.11

$$\Sigma f = \int_{-R}^{R} y' (X + R)^m (X - R)^M \, dX$$

6.12

$$\Sigma f = y' \int_{-R}^{R} (X + R)^m (X - R)^M \, dX$$

6.131

$$\frac{R + X}{2R} = Z$$

6.132

$$R + X = 2RZ$$

6.133

$$X = 2RZ - R$$

6.134

$$dX = 2RdZ$$

6.135

$$X - R = X - R + R - R = 2RZ - 2R = 2R (Z - 1)$$

6.121

$$\Sigma f = y' (-1)^M \int_{-R}^{R} (X + R)^m (R - X)^M dX$$

6.122

$$\Sigma f = y' (-1)^M \int_{0}^{1} (2RZ)^m [2R (1 - Z)]^M \, 2RdZ$$

6.1331

Límites (cambio para $X = 2RZ - R$)

6.1332

$$R = 2RZ - R$$

6.1333

$$\therefore Z = \frac{2R}{2R} = 1$$

6.1334

$$- R = 2RZ - R$$

6.1335

$$\therefore Z = \frac{0}{2R} = 0$$

6.122

$$\Sigma f = y^1 \; (-1)^M \int_0^1 (2RZ)^m \; [2R\,(1 - Z)]^M \, 2RdZ$$

6.123

$$\Sigma f = y^1 \; (-1)^M \int_0^1 (2R)^{m+M+1} \, Z^m \, (1 - Z)^M \, dZ$$

6.124

$$\Sigma f = y^1 \; (-1)^M \int_0^1 (2R)^{m+M+1} \; B \; [(m + 1), \; (M + 1)]$$

6.125

$$B \; (m + 1) \; (M + 1) = \int_0^1 Z^m \; (1 - Z)^M \, dZ$$

6.126

$$y^1 = \frac{\Sigma f}{(-1)^M \; (2R)^{m+M+1}} \quad \frac{1}{B\,[(m + 1), (M + 1)]}$$

6.1270

$$B\,(A, C) = \frac{\Gamma\,(A)\,\Gamma\,(C)}{\Gamma\,(A + C)}$$

6.127

$$\frac{\Sigma f}{(-1)^M \; (2R)^{m+M+1}} \div \frac{\Gamma\,(m + 1)\,\Gamma\,(M + 1)}{\Gamma\,[(m + 1) + (M + 1)]}$$

6.128

$$y^1 = \frac{\Sigma f}{(-1)^M \; (2R)^{m+M+1}} \quad \frac{\Gamma\,(m + M + 2)}{\Gamma\,(m + 1)\,\Gamma\,(M + 1)}$$

Referencia 7

7·3

$$y = y' (X^2 + R_2)^n e^{N \tan^{-1} \frac{X}{R}}$$

7·301

$$n = \frac{1}{2b_2} \qquad N = \frac{A}{Rb_2}$$

7·311

$$y = y' \left(\frac{X^2}{R^2} + 1\right)^n (R^2)^n e^{N \tan^{-1} \frac{X}{R}}$$

7·312

$$\tan^{-1} \frac{X}{R} = \alpha \quad \therefore \quad \frac{X}{R} = \tan \alpha$$

7·313

$$\left(\frac{X^2}{R^2} + 1\right) = \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

7·314

$$N \tan^{-1} \frac{X}{R} = N \alpha$$

7·32

$$y = y' R^{2n} (\sec^2 \alpha)^n e^{N\alpha}$$

7·33

$$y = y' R^{2n} (\sec \alpha)^{2n} e^{N\alpha} = y'' (\sec \alpha)^{2n} e^{N\alpha}$$

7·341

$$\tan \alpha = \frac{X}{R}$$

7·342

$$X = R \tan \alpha$$

7·343

$$dX = d (R \tan \alpha)$$

7·344

$$dX = Rd \tan \alpha =$$

7.345

$$= R \sec^2 \alpha \; d \; \alpha =$$
$$= R \; (co \sec \alpha)^{-2} \; d \; \alpha$$

7.35

$$\Sigma \; y = y'' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sec \alpha)^{2n} \; e^{N\alpha} R \; (\cos \alpha)^{-2} \, d \, \alpha$$

7.36

$$\Sigma \; y = y'' R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \alpha)^{-2n}}{(\cos \alpha)^2} \; e^{N\alpha} d \, \alpha$$

7.37

$$\Sigma \; y = y''' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \; \alpha)^{-2n \; -2} \; e^{N\alpha} \; d\alpha$$

7.381

$$S_1 \; \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \; \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \beta$$

7.382

$$d\alpha = d \; (\frac{\pi}{2} - \beta) = - \; d\beta$$

7.391

$$\Sigma \; y = y''' \int_0^{\pi} (sen \, \beta)^{-2n-2} \; e^{N \, (\frac{\pi}{2} - \beta)} d \, \beta \, (-1) =$$

7.392

$$= y''' \; e^{N \frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (sen \; \beta)^{-2n-2} \; e^{N\beta} \; d\beta =$$

7.393

$$\Sigma \; y = y^{IV} \; F \; [(-2n - 2), \; N]$$

7.4

$$y^{IV} = \frac{\Sigma y}{F[(-2n-2), N]}$$

FÓRMULAS PARA LA INTERPOLACIÓN DE LOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA DE PEARSON

Primer paso:

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3 \quad \mu_4$$

Segundo paso:

$$D = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2$$

$$b_0 = \frac{\mu_2\,(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{D}$$

$$b_1 = \frac{-\mu_3\,(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{D} = -a$$

$$b_2 = \frac{-2\mu_4\mu_2 + 3\mu_3^2 + 6\mu_2^3}{D}$$

Tercer paso:

$$¿b_1^2 > 4b_0b_1? \quad ¿b_1^2 < 4b_0b_1?$$

Cuarto paso:

$$R = \frac{\sqrt{|b_1^2 - 4b_0b_2|}}{2b_2} \qquad A = a - \frac{b_1}{2b_2}$$

$$m = \frac{1}{b_2}\,\frac{R - A}{2R} \qquad M = \frac{1}{b_2}\,\frac{R + A}{2R}$$

$$n = \frac{1}{2b_2} \qquad N = \frac{1}{b_2}\,\frac{A}{R}$$

Quinto paso:

$$y = y'\,(X + R)^m\,(X - R)^M$$

$$y = y'\,(X^2 + R^2)^n\,e^{N \tan^{-1}\frac{x}{R}}$$