Causalidad, pronóstico y regresión

FERNANDO CORTÉS C.

ÁNGEL FLISFISCH F.

ADVERTENCIA

Al escribir el presente trabajo, hemos perseguido fundamentalmente facilitar la difusión de ciertas nociones básicas sobre las que se apoya la utilización de algunos instrumentos de análisis cuantitativo —específicamente el análisis de regresión y el de ecuaciones estructurales— de uso cada vez más frecuente en la investigación social.

Por esta razón, hemos prescindido hasta donde es posible de un aparato matemático y formal, favoreciendo aquellas explicaciones de naturaleza más intuitiva y material. Aun cuando ello supone un sacrificio del rigor en el análisis y desarrollo, creemos que una exposición basada en "demostraciones" de esa clase no sólo presenta un valor docente, en términos de una comprensión correcta y fecunda de estos instrumentos en la investigación.

En efecto, la utilización de un conjunto de ecuaciones de regresión supone, además de una cierta comprensión de lo que podríamos llamar la teoría de la regresión propiamente tal —es decir de los desarrollos lógico-formales que la constituyen y justifican—, el conocimiento del tipo genérico de situaciones reales de las cuales el modelo es una abstracción. En otras palabras, la lógica de la regresión supone una cierta "ontología", si se nos permite utilizar esta noción en el presente contexto, y su conocimiento es necesario para poder traducir exitosamente las condiciones del problema que se investiga al lenguaje del modelo.

Este objetivo ha significado una extensión desmesurada del trabajo, pero intentar escribirlo de manera más sintética habría significado renunciar a lo que puede ser nuestro único aporte a la mejor comprensión de estos temas. Claramente, de haberse optado por una presentación con uso abundante de matrices, cálculo, etcétera, no nos habría tomado tan gran cantidad de páginas.

Por último, queremos dejar constancia de que gran parte del material contenido en este trabajo se encuentra diseminado en diversos textos y artículos. Sin embargo, no hemos tropezado hasta ahora con ninguna exposición que articule de modo coherente los temas de la explicación y pronóstico en el contexto del modelo de regresión. Así, no hemos vacilado en repetir ideas de conocidos econometristas puesto que pensamos que más vale difundirlas a pesar de las críticas que esta actitud pudiera acarrear.

I. Introducción

La utilización del modelo de regresión ha alcanzado cierta popularidad en la práctica de los científicos sociales latinoamericanos que se orientan hacia un trabajo de naturaleza más empírica. Es indudable que el recurrir a nuevas técnicas que permiten introducr en el análisis grados de complejidad más altos es un hecho beneficioso y que debe ser estimulado.

Sin embargo, parece existir un cierto grado de confusión respecto del significado que el modelo de regresión adquiere según los diversos tipos de contextos y situaciones en que se utiliza. Hay que subrayar que estas perplejidades, a cuyo examen están dedicadas las páginas que siguen, no se relacionan con problemas técnicos o técnico-formales, sino que se vinculan con el sentido que debe atribuirse, y en consecuencia la forma en que debe utilizarse, al modelo de regresión según la clase de finalidad que el investigador persiga.

La falta de claridad que existe acerca de cuestiones de esta índole explica el hecho de que se puedan producir discusiones que, en virtud de los malentendidos subyacentes, conduzcan a verdaderos "diálogos de sordos". Un buen ejemplo de este tipo de polémica es la que hemos sostenido recientemente acerca de un procedimiento de estimación de la elasticidad ingreso y la elasticidad demanda de fuerza de trabajo del crecimiento metropolitano de Santiago.[1]

Por otra parte, pensamos que nuestras reflexiones pueden ser de alguna utilidad para aquellos investigadores que recurran a este tipo de técnica, indicándoles ciertas vías de desarrollo e interpretación que tienen la capacidad de enriquecer notablemente el análisis.

[1] Véase Stylianos K. Athanassiou, "Crecimiento Económico Regional y Urbanización en Chile", en *Notas de Población*, año III, vol. 7, CELADE, abril, 1975; Fernando Cortés y Ángel Flisfisch, "Comentarios sobre 'Crecimiento Económico Regional y Urbanización en Chile', de Stylianos K. Athanassiou", misma revista, año III, vol. 8, CELADE, agosto, 1975; "Réplica a los Comentarios de Fernando Cortés y Ángel Flisfisch sobre 'Crecimiento Económico Regional y Urbanización en Chile', de Stylianos Athanassiou", misma revista, mismo volumen.

II. Generalidades sobre pronóstico y explicación

El modelo de regresión se utiliza en dos tipos distintos de circunstancias, las cuales resultan de la finalidad que orienta al análisis.

En algunas ocasiones, el investigador está interesado, fundamentalmente, en la *predicción* de los valores de algunas variables sobre la base del conocimiento de los valores asumidos por otras variables distintas de las anteriores. Así, por ejemplo, en la presentación de los valores adoptados por diversos indicadores socioeconómicos para 23 países del área, utilizados en la construcción de una tipología de unidades nacionales,[2] no existe información acerca del consumo diario de calorías por persona para Guyana. Este déficit puede ser encarado en distintas formas: eliminar del análisis el país en cuestión, eliminar el indicador o intentar predecir (estimar) el valor que éste asumiría dados los valores adoptados por otras variables en esa unidad nacional.

Las dos primeras alternativas implican costos relativamente altos: la primera supone disminuir el volumen de información o el tamaño de la muestra, y la segunda conlleva la exclusión de una variable que puede ser relevante en virtud de consideraciones teóricas y prácticas. De este modo, parece razonable inclinarse por la asignación de un valor al indicador.

Del conjunto de indicadores respecto de los cuales hay información completa, podemos escoger aquel que presenta el coeficiente de correlación más alto con la variable que interesa pronosticar. Se trata del consumo diario de proteínas por persona que muestra una correlación de 0,88 con el de calorías diarias *per cápita.*

Por lo tanto, nuestro interés recae en el *valor esperado* (o valor promedio) del consumo diario de calorías en Guyana, dado el valor observado del consumo diario de proteínas en ese país. El modelo de regresión puede ser interpretado, precisamente, como la relación entre el valor promedio de una variable, designada como dependiente, dados los valores de otras variables denominadas independientes, predictores o regresores. En el ejemplo en cuestión, el ajuste de una recta nos permitiría atribuir a Guyana un consumo diario de 2,140 calorías diarias por persona.

Existen otras situaciones en que la atención del investigador recae en el intento de *explicar* ciertos aspectos de la realidad social, ya sea mediante la contrastación de modelos provistos de una sólida base teórica, o bien intentando discernir la estructura causal que subyacería a un conjunto de relaciones observadas.[3]

[2] Rolando Franco, *Tipología de América Latina*, Cuadernos del Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social, serie II, núm. 17, Santiago de Chile, 1973, p. 68.

[3] Frente a la posición más purista que sostiene que la contrastación empírica sólo es legítima cuando está referida a un modelo establecido a priori, hemos preferido

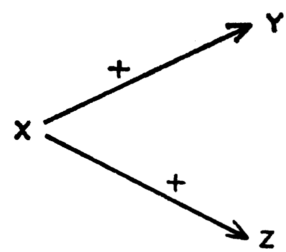
Podemos utilizar el mismo ejemplo para iluminar esta distinción. Es cierto que toda dieta se compone, entre otras cosas, tanto de calorías como de proteínas; además, es plausible admitir que existe una tendencia a que las proporciones en que se combinan sean relativamente estables.[4] Es probable que sean éstas las razones que dan cuenta de la alta correlación entre los indicadores, pero nos parece que habría consenso en admitir que ellas no constituyen una *explicación* socioeconómica satisfactoria de la variación en los respectivos consumos que se observan en los países.

Si deseamos intentar una explicación, nos vemos forzados a recurrir a otras variables respecto de las cuales sea sensato suponer que ellas operan como causas del fenómeno a ser desentrañado.[5] Por ejemplo, es posible hipotetizar que las magnitudes de los consumos de calorías y proteínas están determinadas por la capacidad adquisitiva promedio, y a partir de aquí inferir que las diferenciales de consumo que se observan entre los países se deben a las diferenciales de ingreso *per cápita*.

La estructura causal postulada es susceptible de una representación gráfica muy simple:

GRÁFICO 1

Estructura causal subyacente a las relaciones observadas entre consumo de calorías (Y), consumo de proteínas (Z) e ingreso per cápita (X)



El paso siguiente en la investigación consistiría en individualizar un procedimiento que nos permita contrastar empíricamente el modelo: esto es, determinar cuán bien o cuán mal se ajusta a la información de que

optar por una visión más fluida del trabajo de investigación, admitiendo la posibilidad de que el modelo se construya simultáneamente con el análisis de los datos. Por lo demás, ello es más realista si se considera las prácticas de investigación de la gran mayoría de los científicos sociales.

[4] Además de la alta correlación entre ambas variables, existe evidencia adicional para afirmar la tendencia a la combinación en proporciones estables: según los datos (R. Franco, *op. cit.)*, los coeficientes de variabilidad de proteínas y calorías son muy bajos: 0,250 y 0,159, respectivamente.

[5] En este trabajo, partimos de la noción de causa tal como ella es usada en la práctica de investigación. Por tanto, prescindimos de toda consideración respecto a los problemas de orden epistemológico que esa categoría plantea.

disponemos. El proceso de contrastación lo podemos descomponer en dos partes: primero, interesa evaluar la bondad del modelo considerado en su totalidad y, segundo, la atención se dirige también hacia la magnitud y sentido de los vínculos causales postulados. En efecto, siguiendo con la línea de argumentación recién mencionada, nuestra explicación implica que los cambios en el ingreso deben producir efectos positivos sobre ambos tipos de consumos. De esta manera, aun si la contrastación del modelo como un todo arrojara un resultado favorable, nos veríamos en la necesidad de rechazarlo si los efectos estimados del ingreso fuesen de signo contrario al postulado —vale decir, si aumentos en el nivel de ingreso conducen a disminuciones en el consumo por persona de calorías y proteínas— o si ellos fuesen nulos.

En el caso del *modelo específico* representado por el gráfico 1, la evaluación del nivel de adecuación que tendría respecto a la información disponible puede realizarse recurriendo a predicciones referidas al valor de la correlación entre Y y Z, una vez que se ha controlado el efecto de la variable X. La ausencia de relación causal que se ha postulado, entre los consumos de proteínas y calorías, implica que la correlación parcial $r_{YZ.X}$, debe ser igual a cero. Esta forma de encarar la validez de la estructura causal considerada como un todo ha llevado a desarrollos relativamente extensos y bien conocidos.[6]

Para la estimación de la magnitud y sentido de los vínculos causales se puede recurrir indiferentemente a las correlaciones r_{XY}, y r_{XZ}, o a las regresiones de Y sobre X y de Z sobre X. Lo importante es que los coeficientes que afectan a X, en ambas regresiones, sean positivos y estadísticamente distintos de cero.

Aparentemente, la utilización del modelo de regresión en un contexto en que priva el interés explicativo no trae consigo dificultades adicionales y distintas de las que provoca cuando interesa usarlo como instrumento predictivo. Sin embargo, cumple funciones bien diferentes por cuanto en un caso se convierte en una herramienta que permite estimar la magnitud y sentido de relaciones causales, mientras que en un contexto predictivo este énfasis desaparece.

Cuando se abandona la orientación explicativa el acento se pone sobre la magnitud del coeficiente de correlación total entre la variable dependiente y los predictores, a la vez que sobre la precisión alcanzada en la estimación de los parámetros. Si bien la justificación de este énfasis es susceptible de expresarse matemáticamente, no es menos cierto que puede comprenderse intuitivamente. Un investigador tendrá mayor confianza en sus predicciones si ellas se basan en una fuerte relación entre

[6] Pese a que existe una extensa literatura sobre este tema, los desarrollos básicos están contenidos en: H. Simon, "Spurious Correlation: A Causal Interpretation", en *Journal of the American Statistical Association*, vol. 49, 1954; Blalock M. Jr., *Causal Inferences in Nonexperimental Research*, Chapell Hill, North Carolina, 1964.

la variable dependiente y los predictores y si las estimaciones de los parámetros no se encuentran aquejadas por fuertes fluctuaciones muestrales.

La distinción entre explicación y predicción no es absoluta. En realidad, el conocimiento de la estructura causal subyacente puede ser utilizado para fines predictivos y, aún más, existen situaciones en que la bondad de la predicción está vinculada al grado de conocimiento que se tenga de las relaciones causales operantes.[7] No obstante, la distinción es de suma importancia,[8] lo que se puede apreciar con mucho mayor claridad desde el momento en que se introducen complejidades adicionales en el análisis. Esto es, precisamente, lo que intentamos realizar a continuación.

III. El modelo de regresión en el contexto de la predicción

Para ilustrar nuestra tesis podemos restringirnos al caso en que se cuenta sólo con tres variables: *X, Y* y *Z,* puesto que la lógica de la argumentación es esencialmente la misma si se incorporan variables adicionales. De esta manera, al imponernos esa restricción no perdemos generalidad y ganamos en la simpleza de la exposición.

Supongamos que el interés recae en pronosticar ciertos valores de *Y,* dados los de *X* y *Z*. En otras palabras, y según ha sido señalado previamente, nos interesa expresar el valor esperado de *Y* como función de los predictores *X* y *Z*.[9]

En la forma más simple del modelo de regresión se supone que los valores observados de *Y,* han sido generados por medio de un conjunto de variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, las cuales se caracterizan por ser estadísticamente independientes, poseer igual varianza σ^2, y cuyos promedios son expresables como una función lineal de los predictores:

$$E(Y_i/X_i\ Z_i) = m_0 + m_1X_i + m_2Z_i \tag{1}$$

Por otra parte, cada variable aleatoria Y_i, responde a:

$$Y_i = m_0 + m_1X_i + m_2Z_i + U_i \tag{2}$$

[7] Fisher F. M., *The Identification Problem in Econometrics*, Mc Graw Hill, Nueva York, 1966, p. 3.

[8] La distinción ha sido enfatizada por Goldberger A. S., "Structural Equation Models: An Overview", en *Structural Equation Models in the Social Sciences*, Goldberger y Duncan Eds., Seminar Press, Nueva York, 1973.

[9] En la literatura técnica se distingue entre la predicción de valores promedios y valores individuales de *Y*. La diferencia se encuentra en la estimación del intervalo del pronóstico. En este trabajo, sólo nos referimos a la estimación de promedios, lo que no implica pérdida alguna de generalidad.

Como es bien sabido, el tránsito entre ambas expresiones se realiza en virtud de que el valor esperado de las variables estocásticas U_i se supone igual a cero, y sus varianzas iguales a σ^2.

De esta manera, el modelo de regresión entrega precisamente la posibilidad de pronosticar valores de Y, y ello constituye la finalidad principal de un contexto predictivo.

El modelo de regresión proporciona, por consiguiente, una respuesta inmediata al problema de predecir el valor de una variable conociendo los valores correspondientes a las otras dos.

Ahora bien, al realizar interpolaciones o extrapolaciones debemos distinguir dos objetivos distintos: por una parte, es necesario asignar *un* valor a la variable sobre la cual recae el pronóstico y, por otra, interesa determinar el grado de confianza y precisión que podemos depositar en ese valor. El primer problema, utilizando ahora un lenguaje técnico, es el de obtener un pronóstico puntual, en tanto que el segundo se traduce en la construcción de un intervalo de predicción al cual se asocia una medida probabilística de su verosimilitud.

En el caso concreto de nuestro ejemplo, el problema de la estimación puntual reside en lograr un estimador para $E(Y_i/X_iZ_i)$, el cual se obtiene remplazando los parámetros m_0, m_1 y m_2 por sus estimadores mínimos cuadráticos:[10] m_0, m_1 y m_2. De esta manera, (1) puede ser reescrita como:

$$(3) \qquad \hat{E}(Y_i/X_i, Z_i) = \tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 X_i + \tilde{m}_2 Z_i = P$$

Es bien sabido[11] que P es un estimador lineal o insesgado del valor esperado de Y. Esta característica permite satisfacer el primer objetivo perseguido en la predicción, puesto que el insesgamiento nos garantiza que los valores numéricos predichos por lo menos se distribuirán en torno a un valor promedio que es idéntico al real asumido por la variable. Por supuesto, esta propiedad no es satisfactoria por cuanto no considera la dispersión posible de las estimaciones. Una vez que en la ecuación (3) se han sustituido los valores numéricos de los estimadores mínimo-cuadráticos, estaremos en condiciones de computar un valor para Y. Para ello basta con remplazar X y Z por los valores que ellas asumen respecto de la unidad de análisis sobre la que recae la predicción.

Si bien la característica de insesgamiento es importante, desde el punto de vista de la predicción parece serlo aún más la posibilidad de acotar dentro de límites aceptables el valor pronosticado. Supongamos que la variable Y es una proporción; si la variabilidad de P es tal que él puede

[10] Además del procedimiento de estimación mínimo cuadrático, la Estadística ofrece un conjunto de otros métodos de estimación: estimadores de máxima verosimilitud, variables instrumentales, etcétera.

[11] Véase Johnston J., *Econometric Methods*, Mc. Graw Hill, segunda edición, Nueva York, 1972, pp. 152-155.

oscilar entre 0 y 1, claramente no nos sentiríamos muy satisfechos en nuestra estimación punto. Por esta razón, la construcción de un intervalo de predicción es asunto capital para los fines del pronóstico.

El procedimiento utilizado garantiza que la varianza del predictor es mínima con respecto a las correspondientes varianzas de cualquier otro predictor lineal e insesgado. Esta característica nos asegura de que el intervalo de predicción que construyamos es óptimo.

La expresión para el intervalo de predicción se simboliza como:

$$(4) \qquad E(Y_i/X_i, Z_i) = P \pm t(\text{Var } P)^{\frac{1}{2}}$$

donde t es el coeficiente que representa el nivel de confianza con que se ha decidido hacer el pronóstico, y resulta de la tabla de la distribución de Student. Además, Var P, representa la varianza del predictor y su tamaño está en relación directa con la amplitud del intervalo del pronóstico. Por lo tanto, constituye una medida del grado de precisión de este último.

Frente al problema de seleccionar un modelo de regresión para usos predictivos, entre varios alternativos, el criterio adecuado para resolverlo es el de elegir aquel que presente el menor valor de Var P, una vez que se ha decidido acerca del nivel de confianza. Esta regla equivale a inclinarse por aquel modelo de regresión que entregue la menor amplitud (A) del intervalo de predicción, tal como se puede apreciar en:

$$(5) \qquad A = 2t(\text{Var } P)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora bien, la magnitud de Var P se puede descomponer en una suma ponderada de las varianzas y covarianzas de los estimadores, en que las ponderaciones son los valores de *X* y *Z* que se utilizan para computar la estimación puntual. En virtud del papel jugado por estos valores específicos de *X* y *Z*, resulta que la amplitud del intervalo de predicción aumenta al hacerse mayor la discrepancia entre ellos y aquéllos empleados para estimar el modelo. [12]

Por otra parte, las varianzas y covarianzas de los estimadores dependen a su vez de distintos elementos: de la varianza de las variables estocásticas U_i, de la correlación entre los regresores *X* y *Z*, de sus respectivas varianzas, de sus momentos de orden uno y dos respecto al origen y del número de observaciones utilizadas para el ajuste del modelo. [13]

[12] Para una exposición simple y completa, véase Wonnacott R. y Wonnacott T., *Econometrics*, John Wiley, Nueva York, 1970, pp. 30-32.

[13] En efecto, estas relaciones resultan de modo inmediato de las exposiciones correspondientes a las varianzas y covarianzas de los estimadores:

$$\text{Var } \hat{m}_0 = \frac{\sigma^2 \left\{ \frac{\Sigma x^2}{n} \cdot \frac{\Sigma z^2}{n} - \frac{(\Sigma XZ)^2}{n} \right\}}{n S^2_Z S^2_X (1-r^2_{XZ})} \qquad \text{Var } \hat{m}_1 = \frac{\sigma^2}{n S^2_X \{1-r^2_{XZ}\}}$$

En la práctica es frecuente, tal como se hizo al comienzo de estas páginas, poner el acento en el valor del cuadrado del coeficiente de correlación múltiple (R^2). Es bien sabido que R^2 refleja la contribución de los componentes *sistemáticos* del modelo de regresión originados en la actuación de X y Z y que se expresa en la noción de varianza explicada. La contrapartida de esta noción está constituida por la operación de la variable U, la cual compone la parte *no sistemática* del modelo. Ella refleja el movimiento de Y originado en factores desconocidos y distintos de X y Z, y su comportamiento es de naturaleza enteramente hipotética y no susceptible de observarse; por consiguiente, no puede ser objeto de control o manipulación en un contexto predictivo. Si la varianza de U es grande, la amplitud de sus efectos también lo será y, en consecuencia, una mayor variabilidad del componente no sistemático acarreará consigo un intervalo de predicción más amplio, bajo el supuesto de que todos los otros factores se mantienen constantes.

Estas son las razones que justifican el criterio consistente en perseguir un R^2 lo más próximo posible a 1, en contextos predictivos. No obstante, su aplicación ignora las otras fuentes que generan la amplitud del intervalo de predicción. De ellas, la más conocida es la que se origina en el valor que asuma la correlación entre X y Z.[14]

Tanto las varianzas como las covarianzas de los estimadores son, entre otras cosas, una función del recíproco del valor complementario del cuadrado de la correlación entre X y Z. Esto significa que cuanto más intenso sea el vínculo entre los regresores, mayor es la magnitud absoluta de las varianzas y covarianzas de los estimadores y, por lo tanto, Var P crece sin límite. En consecuencia, a medida que aumenta la colinealidad entre los regresores también crece la amplitud del intervalo de predicción, con la pérdida consiguiente en precisión.

Este hecho puede tener consecuencias prácticas cuando la finalidad perseguida es eminentemente predictiva. En efecto, supongamos que r_{XZ} está próximo a 1 lo que lleva a un intervalo de predicción bastante más

$$\operatorname{Var} \hat{m}^2 = \frac{\sigma^2}{nS_Z^2\{1-r_{XZ}^2\}} \qquad \operatorname{Cov} \hat{m}_0\,\hat{m}_2 = \frac{\sigma^2\left\{\bar{X}\,\frac{\Sigma XZ}{n} - \bar{Z}\,\frac{\Sigma X^2}{n}\right\}}{nS_Z^2\,S_X^2\,\{1-r_{XZ}^2\}}$$

$$\operatorname{Cov} \hat{m}_0\,\hat{m}_1 = \frac{\sigma^2\left\{\bar{Z}\,\frac{\Sigma XZ}{n} - \bar{X}\,\frac{\Sigma Z^2}{n}\right\}}{nS_Z^2\,S_X^2\,(1-r_{XZ}^2)} \qquad \operatorname{Cov} \hat{m}_1\,\hat{m}_2 = -\,\frac{\sigma^2\,r_{XZ}}{nS_X\,S_Z\,(1-r_{XZ}^2)}$$

[14] Un buen tratamiento elemental de esta cuestión, conocida con el nombre de problema de multicolinealidad, se encuentra en Wonnacott y Wonnacott, *op. cit.*, pp. 59-63.

grande que el que se obtiene si el valor promedio de Y se pronostica simplemente a partir sólo de X o sólo de Z. En este caso, es posible que la consecución de los objetivos característicos de la predicción se realicen con mayor éxito utilizando un modelo de regresión que contemple un único regresor. De la misma manera, en esta clase de situaciones podría ser razonable desarrollar el análisis sobre la base de un conjunto de modelos de regresión simple caracterizados por la misma variable dependiente. [15]

La lógica que subyace a la relación funcional entre los momentos de orden dos con respecto a la media (esto es, varianzas de los regresores), los momentos de orden uno y dos con respecto al origen y las varianzas y covarianzas de los estimadores responde a la naturaleza de los parámetros.

Existe una relación inversa entre las varianzas y covarianzas de los estimadores y las varianzas de los regresores: S_X^2 y S_Z^2. En efecto, si la variabilidad de X y Z es pequeña, el modelo se ha ajustado sobre la base de una estrecha franja de observaciones; sin embargo, formalmente el modelo representa un plano cuya validez es aplicable para cualquier combinación posible de valores de los regresores, y es esta característica la que nos permite predecir. En consecuencia, la mayor o menor dispersión de los predictores respecto de sus medias implica, respectivamente, una mayor o menor precisión en las estimaciones. Es así como la menor variabilidad de X y Z trae consigo intervalos de predicción más amplios para ambos tipos de parámetros: coeficiente de posición y coeficientes angulares.

La intervención de los momentos con respecto al origen se explica por la peculiar naturaleza del coeficiente de posición: $\tilde{m}_0$ constituye un valor que es asumido por Y para una combinación bien específica de valores de X y Z. Como se sabe, el valor esperado de la variable dependiente dado que los regresores son iguales a cero, es justamente $\tilde{m}_0$, y de este modo su estimación constituye algo así como una predicción forzosa de Y en el origen del sistema coordenado. Si la franja de observaciones utilizada en la estimación del modelo se encuentra distante del origen, el grado de precisión que se puede otorgar a esa predicción es pequeño y viceversa. Ahora bien, los momentos de orden uno y dos con

[15] En el intercambio de opiniones con el profesor Athanassiou indicado en la cita 1, una buena parte de la discusión adquiere pleno sentido si se tiene a la vista la situación examinada en el texto. En efecto, el procedimiento utilizado por él, consistente en predecir el crecimiento metropolitano de Santiago a partir de dos regresiones en que se emplean independientemente como regresores el ingreso per cápita y la demanda ocupacional, sería legítimo si es que el contexto de la investigación se ha definido como eminentemente predictivo. Sin embargo, es difícil aceptar esta interpretación, por cuanto el mismo profesor Athanassiou ha enfatizado la orientación teórica que subyace a su trabajo. Desde el momento en que el interés recae en la magnitud y signo de los parámetros, las reglas del juego son bien distintas, según esperamos demostrarlo.

respecto al origen miden justamente la posición de las observaciones, y es por esto que ellos se asocian positivamente con la magnitud del intervalo de predicción.

El papel que juega el número de observaciones respecto a la varianza del predictor es el clásico en la inferencia estadística: a mayor tamaño de muestra mayor precisión en la estimación y en el pronóstico.

En un contexto predictivo el problema fundamental reside en elegir aquel modelo de regresión que entregue pronósticos provistos del mayor grado de precisión alcanzable. En términos del desarrollo recién esbozado, queda claro que las virtudes de los modelos alternativos deben evaluarse y compararse atendiendo a la amplitud de los respectivos intervalos de predicción, y ello, a su vez, implica investigar los valores de Var P.[16] Por otra parte, este criterio de decisión, dada la complejidad de los elementos constitutivos de Var P, conlleva implícitamente un conjunto de resoluciones respecto a correlación múltiple, varianzas y covarianzas de los estimadores, correlación entre regresores, distancia de los pronósticos respecto de los valores observados y tamaño de la muestra. Estos son, justamente, los elementos clásicos empleados en la evaluación de modelos de regresión.

Sin embargo, todo intento de pronosticar, empleando modelos de regresión, se apoya en dos supuestos que no siempre se hacen explícitos: por una parte, hay que postular que los coeficientes de regresión poblacionales m_0, m_1 y m_z, son constantes y, por otra, que el modelo ha sido correctamente especificado.

El primer supuesto implica que la estructura o haz de relaciones que gobierna el comportamiento de la unidad de observación respecto de la cual se predice es la misma que subyace al mecanismo que ha generado las observaciones empleadas para la estimación del modelo.

El contenido de la segunda hipótesis dice relación con la forma funcional del modelo y con los regresores específicos que contiene: se supone que ambos reflejan adecuadamente la estructura subyacente a los datos.

Si cualquiera de ambos supuestos no se cumple, puede acontecer que el valor que en definitiva se observe para la unidad cuyo comportamiento se ha pronosticado, admitiendo que ello sea factible, se encuentre fuera del intervalo de predicción. Frente a predicciones erróneas de este tipo, es necesario poner en tela de juicio las dos condiciones implícitas señaladas.[17] Frente a esta situación, una posible estrategia consiste en intentar investigar, de manera más fina, la estructura causal subyacente; pero,

[16] La varianza del predictor responde a la fórmula:
$\mathrm{Var}\ P = \mathrm{Var}\ \tilde{m}_0 + X_0^2\ \mathrm{Var}\ \tilde{m}_1 + Z_0^2\ \mathrm{Var}\ \tilde{m}_2 + 2X_0\ \mathrm{Cov}\ \tilde{m}_0\tilde{m}_1 + 2Z_0\ \mathrm{Cov}\ \tilde{m}_0\tilde{m}_2 + 2Z_0X_0\ \mathrm{Cov}\ \tilde{m}_1\tilde{m}_2$ en que Z_0 y X_0 son los valores dados de Z y X, respectivamente.

[17] Esta conclusión debe entenderse sin perjuicio de la posibilidad de que el intervalo construido caiga en la región correspondiente al nivel de significación.

de optarse por esta vía, probablemente se producirá un desplazamiento más o menos perceptible desde el ámbito de la predicción al de la explicación.

IV. Ecuaciones estructurales y causalidad

Para introducirnos en el tema de la conexión entre modelo de regresión y explicación, retomaremos un ejemplo ya mencionado. Supongamos que intentamos predecir *Y* a partir de *X* y *Z*, postulando el modelo más simple posible:

$$Y_i = m_0 + m_1 X_i + m_Z Z_i + U_i \qquad \text{(repetida)} \tag{2}$$

Ahora bien, imaginemos que la correlación r_{XZ} es de magnitud tal que el intervalo de predicción resultante es más amplio que el que se obtiene con alguno de los siguientes modelos alternativos:

$$Y_i = a + bX_i + e_1 \qquad \text{Y,} \tag{6}$$

$$Y_i = c + dZ_i + e_2 \tag{7}$$

Manteniéndose en el dominio del pronóstico, parece ser razonable sustituir el modelo que contiene tres variables por (6) o por (7). La elección entre estas dos últimas alternativas se realizará atendiendo al criterio expuesto anteriormente.

Sin embargo, desde el momento en que el interés recae en la investigación de posibles nexos causales entre las variables, un procedimiento análogo al recién descrito comienza a perder sentido. En efecto, en términos de la lógica causal en uso y considerando sólo las relaciones con *Y*, existirían tres posibles alternativas de estructuras subyacentes a los datos: a) *X* y *Z* son causas de *Y*, b) *X* es causa de *Y* y *Z* no tiene efecto sobre *Y*, y c) *Z* es causa de *Y* pero *X* no lo es.

Cumpliéndose ciertas condiciones, la alternativa a) puede traducirse al lenguaje de la regresión por medio de la expresión (2); en tanto que las b) y c) encuentran sus representaciones en (6) y (7) respectivamente. Desde el punto de vista de la explicación causal, sería inadmisible postular que tanto *X* como *Z* son causas de Y_i, y simbolizar formalmente esa hipótesis mediante un sistema de ecuaciones compuesto por (6) y (7).

Esta última aseveración no es difícil de probar, pero se requiere previamente esclarecer cuál es, de modo específico, la función que cumple el modelo de regresión en los contextos explicativos.

Según se dijo, el análisis que se orienta hacia la explicación persigue obtener, además de una evaluación de la bondad de la estructura causal total, evidencia acerca de la existencia o inexistencia de los vínculos causales postulados, esto es, determinar si los diversos efectos hipotetizados son o no distintos de cero.

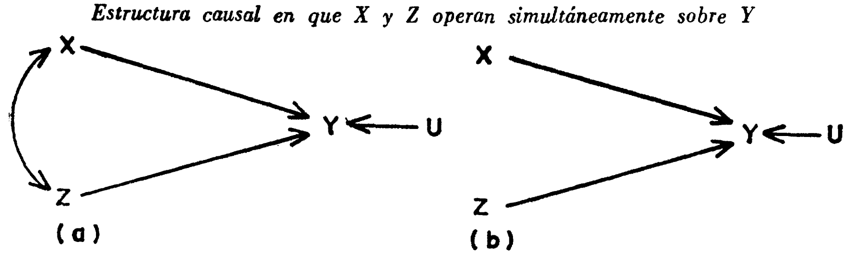
Las estructuras causales se construyen tanto por medio del lenguaje ordinario, como a través de representaciones gráficas análogas a las que hemos utilizado. Mientras nos mantengamos en esos niveles, no existen procedimientos que nos permitan contrastar empíricamente nuestras proposiciones. La función cumplida por el modelo de regresión es precisamente ésta: mediante el establecimiento de una correspondencia entre la magnitud de los efectos y los parámetros del o de los modelos de regresión, se cuenta con un procedimiento que, a través de la estimación de ellos, permite decidir acerca de la presencia o ausencia y magnitud de los vínculos causales.

De esta manera, el problema fundamental que plantea el uso de la regresión en la esfera de la explicación causal, reside en la búsqueda de sistemas de ecuaciones que reflejen adecuadamente la estructura causal postulada. Esta característica tiene un sentido bien preciso: un sistema de ecuaciones de regresión constituye una representación adecuada de una estructura causal cuando se ha establecido entre vínculos causales y parámetros una correspondencia de naturaleza tal que el valor estimado de cualquier parámetro constituye una medida de la magnitud del nexo causal correspondiente.[18]

Sobre la base de estas nociones, demostraremos ahora que el sistema formado por (6) y (7) no constituye una representación idónea de la estructura en que X y Z operan simultáneamente sobre Y. La representación gráfica de la cadena causal postulada es la siguiente:

GRÁFICO 2

Estructura causal en que X y Z operan simultáneamente sobre Y



[18] Normalmente, la noción de ecuaciones de regresión se reserva para una o más igualdades que se postulan como no interdependientes, esto es, no constituyen un sistema. En los casos en que se tiene un sistema de ecuaciones interdependiente, se acostumbra a hablar de ecuaciones estructurales. Un esquema causal puede ser representado sea por ecuaciones de regresión, o bien por ecuaciones estructurales, según su naturaleza específica. Esta distinción encontrará aplicación más adelante.

En la representación 2(a), las flechas unidireccionales desde X y Z hacia Y expresan los vínculos causales hipotetizados. El sentido de estos nexos es el de simbolizar aquellos cambios en Y producidos única y exclusivamente por el movimiento en cada una de las variables. Así, por ejemplo, la flecha orientada desde X hacia Y refleja la magnitud del cambio en Y producido por X cuando Z se mantiene constante.

Las variaciones que se produzcan en X o en Z, obedecen a la acción de otras variables no contempladas en el modelo. Para que X varíe manteniéndose Z constante, es necesario que algunas de las variables no incluidas operen exclusivamente sobre X, ya que si todas ellas afectaran a ambas a la vez, cualquier variación en una implicaría cambios en la otra, y viceversa. Sin embargo, hay que admitir la posibilidad de que algunos de esos factores sean comunes a las variables explicativas. El segmento curvilíneo bidireccional que conecta a X y Z refleja, precisamente, la concomitancia entre ellas originada en la acción de los factores comunes y su magnitud se mide por r_{XZ}. Por tanto, ese segmento simboliza la correlación en cuestión.

Las modificaciones conjuntas de X y Z conducen a cambios en Y, pero a diferencia del caso anteriormente examinado, no es posible aquí identificar aquella parte de la variación susceptible de atribuirse a X de aquella asignable a Z. Ahora bien, al intentar una explicación causal se persigue fundamentalmente identificar la importancia que tiene la actuación de cada una de las variables explicativas [19] sobre el movimiento que se observa en la variable explicada. Luego, la propia naturaleza del análisis causal conduce a la decisión de excluir esta fuente de variación de la evaluación del modelo global y de la magnitud de los nexos causales propiamente tales. Así, podemos afirmar que r_{XZ} simboliza sólo una correlación carente de contenido causal. [20]

Si se desea incluir en la explicación el cambio en Y *originado* en el cambio conjunto de X y Z, será necesario proceder a ampliar el modelo, incorporando de modo *explícito* los factores comunes que subyacen a la magnitud de r_{XZ}.

Además, es posible que Y experimente variaciones independientes de la acción de las variables explicativas. El gráfico incluye esta característica por medio de un nexo unidireccional desde U hacia Y, donde U simboliza, entre otras cosas, un conjunto de variables calificadas como no relevantes para el análisis. [21]

[19] Hasta ahora, Z y X han sido denominadas regresores, en virtud del énfasis en el pronóstico. En el contexto de la explicación causal, conviene sustituir esa nomenclatura por la de variables explicativas, lo que acentúa las funciones diferentes que cumplen en uno y otro caso.

[20] Sobre este punto, se puede consultar a Duncan O. D., Partials, Partitions and Paths, en *Sociological Methodology 1970,* Borgatta E. F. y Bohrnstedt G., Eds., Jossey-Bass Inc., San Francisco, 1970.

[21] Esto se puede apreciar en la siguiente descomposición de la varianza de la variable explicada: →

En consecuencia, entre las fuentes de variación en Y debemos distinguir aquellas que debilitan la explicación causal de las que *sí* constituyen una auténtica expresión de esa lógica: cuando en la varianza de Y juegan un papel preponderante U y los factores desconocidos comunes a X y Z, el modelo es inadecuado desde el punto de vista de este tipo de explicación.

Puesto que nuestro interés reside en contraponer explicación y predicción en términos de las distintas finalidades perseguidas y sus correspondientes énfasis, vale la pena examinar el problema a la luz del desarrollo recién expuesto. En el ámbito de la predicción, sólo interesa de modo secundario distinguir las posibles fuentes de variación de Y, por ejemplo, si es que hay evidencia que apunta hacia problemas de multicolinealidad con la consiguiente pérdida de precisión expresada en un intervalo de predicción más amplio. Al contrario, la lógica de la explicación causal tiene como objetivo esencial y propio capturar e identificar las fuentes de la variabilidad en Y.

De esta manera, un mismo modelo de regresión debe ser evaluado desde puntos de vista distintos, según se lo utilice para fines predictivos ó para propósitos explicativos. En el primer caso, sabemos ya que la atención debe recaer sobre la magnitud de Var P, pero si el modelo es visto como la representación de una estructura causal entonces el interés se desplaza desde el problema de la *confiabilidad* del modelo al de su *validez*, por cuanto la validación del modelo causal se confunde con la validez de la regresión. Más adelante estaremos en condiciones de ilustrar esta diferencia de un modo más concreto.

La figura *b* del gráfico 2, representa el mismo modelo que hemos discutido hasta ahora, salvo que se hipotetiza la ausencia de factores comunes a X y Z, lo que se reflejará en un r_{XZ} igual a cero. Esta cadena causal no es más que un caso especial de la expresada por 2-a.

Consideremos ahora el problema de la adecuación entre el esquema causal 2-a y el sistema de ecuaciones de regresión formado por (6) y (7). Puesto que en una explicación causal interesa separar las distintas fuentes que contribuyen a la variación de Y, el modelo de regresión será o no apropiado según su capacidad para individualizarlas o identificarlas.

Si se considera que (6) y (7) simbolizan convenientemente la cadena causal, será necesario demostrar que ellas nos permitirían distinguir entre las variaciones debidas a X, a Z, a la acción de factores comunes a X y Z y a variaciones de Y que son independientes de las fluctuaciones de las variables explicativas.

Para interpretar causalmente las ecuaciones en cuestión disponemos

$$\mathrm{Var}\ Y = m_1^2 \mathrm{Var}\ X + m_2^2 \mathrm{Var}\ Z + 2 m_1 m_2 r_{XZ} S_X S_Z + \mathrm{Var}\ U$$

de cuatro elementos:[22] b, d, e_1 y e_Z. Existe sólo una posible asignación de contenido causal a los parámetros: interpretar b como la magnitud del efecto de x, d como el correspondiente a la variable z y los términos estocásticos como representando a las fuentes de variación de y, que no se relacionan con X ni Z. Sin embargo, este modo de traducir la cadena causal deja desde ya fuera la acción conjunta de las variables explicativas. En consecuencia, basta con esta característica para decidir que (6) y (7) no representan convenientemente la estructura 2-a. Hay un caso en que esta conclusión no es válida: cuando se postula, tal como en el diagrama 2-b, la inexistencia de la fuente de variación omitida, esto es, al suponer que r_{XZ} es idéntica a cero.

Ahora bien, las razones para rechazar el modelo de regresión formado por el sistema de ecuaciones son bastante más numerosas. Fijemos la atención sobre (6): las variaciones observadas en X se originan, de una parte, en los factores que sólo afectan a esta variable y, de otra, en aquellos *comunes* a X y Z; por tanto, en el coeficiente b se confunden impactos de ambas clases de procedencias. En consecuencia, el parámetro no representa sólo el vínculo causal de X hacia Y, sino que también incorpora el efecto de aquellos factores que dan cuenta de la relación entre las variables explicativas.

Por su parte, la variable estocástica e_1 presenta la misma confusión de efectos, ya que no sólo incluye la operación de variables que influyen sobre Y independientemente de X y Z, sino que también incorpora la magnitud del vínculo causal originado por los factores propios de Z e independientes tanto de X como de las perturbaciones estocásticas. De este modo, terminamos particionando uno de los componentes sistemáticos del modelo causal en una parte *estocástica* —esto es, no sistemática— y confundiendo lo que resta de este efecto en la actuación del otro factor explicativo explícitamente considerado. Luego, esta estrategia tiene como consecuencias prácticas disminuir el coeficiente de determinación (hay una parte del efecto de Z en e_1), además de sobrestimar el poder explicativo de X (la otra parte del impacto de Z). Se puede efectuar una argumentación absolutamente análoga para interpretar d y e_Z de la ecuación (7).

El resultado de nuestro análisis es claro: el sistema de ecuaciones de regresión (6) y (7), no constituye una representación idónea del esquema causal simbolizado por el gráfico 2-a. Por consiguiente, su utilización como medio de validación del modelo postulado es errónea. Esta conclusión no es verdadera en el caso del diagrama 2-b, según se demostrará más adelante.

Evaluemos ahora los méritos de la ecuación de regresión (2), en rela-

[22] Los términos libres a y c en las ecuaciones (6) y (7) no expresan fuentes de variación, ya que sólo se relacionan con el nivel asumido por Y. Por esta razón, no constituyen elementos a los que se les pueda otorgar un contenido causal.

ción a su capacidad para expresar el discurso causal contenido en el gráfico 2.

El vínculo causal que une *X* e *Y* supone la existencia de factores que, por su impacto exclusivo sobre la variable explicativa *X*, producen una cierta variación en *Y*. Para evaluar la magnitud de un cambio de esta clase necesitamos, por lo tanto, que el modelo de regresión contenga un parámetro identificable, cuyo valor sea independiente de los distintos niveles de *Z*.

El parámetro m_1 de la ecuación (2) tiene precisamente esa característica.[23] Podemos obtener una demostración simple de esta afirmación razonando del siguiente modo: supongamos que se ha fijado la variable *Z* en un cierto valor *arbitrario* *C* y que *X* asume el valor X_0; al remplazar estos valores en la ecuación (2) obtenemos la expresión:

$$Y_0 = (m_0 + m_2C) + m_1X_0 + U$$

donde Y_0 es el valor que adopta la variable *Y* en este caso.

Imaginemos ahora que, sin que *Z* varíe, la variable *X* experimenta un incremento de una unidad. La ecuación (2) nos arroja entonces el siguiente valor para Y:

$$Y_1 = (m_0 + m_2C) + m_1X_0 + m_1 + U$$

Para determinar cuánto ha cambiado la variable explicada *Y* basta con restar Y_0 de Y_1:

$$Y_1 - Y_0 = m_1$$

Puesto que todas las fuentes de variación de *Y* se han mantenido constantes, la magnitud de su cambio sólo se puede atribuir a la fluctuación experimentada por *X*. Luego, podemos concluir que m_1 mide el impacto que tiene un cambio unitario de *X* sobre *Y*. De este modo, el parámetro m_1 refleja adecuadamente el contenido causal postulado para la relación entre *X* e *Y* en el diagrama 2. De idéntica manera, se puede demostrar que m_2 tiene esa misma característica en relación con el vínculo causal que une a *Z* con *Y*.

Ahora bien, nos interesa que el modelo utilizado para validar nuestras hipótesis causales sea también capaz de discriminar entre los efectos propios de *X* y *Z* y aquellos que se originan tanto en la existencia de factores comunes a las variables explicativas como en fuentes de variación que afectan a *Y* independientemente de la variación en *X* y *Z*.

[23] La demostración del contenido causal de los parámetros puede hacerse en términos más económicos y elegantes interpretando los vínculos causales como derivadas. El lector interesado puede consultar el apéndice que se anexa al final de este trabajo.

Uno de los teoremas básicos del modelo de regresión establece que la varianza de la variable explicada (denominada también varianza total) es susceptible de descomponerse en la suma de una parte explicada por el modelo (varianza explicada), y de otra originada en perturbaciones estocásticas (varianza no explicada). Tradicionalmente, el análisis permanece en este nivel de descomposición, sin atender a otras posibles particiones de la varianza total, que resultan ser bastante más útiles en el contexto de la explicación causal.

La partición clásica de la varianza total de Y es:

$$(8) \qquad \text{Var. Tot. de Y} = \text{Var. Explic.} + \text{Var. no Explic.}$$

La varianza no explicada simplemente refleja la operación de los factores que afectan a Y con independencia de X y Z, esto es, la varianza de la variable U. En este sentido, el modelo de regresión, en su interpretación tradicional, proporciona de inmediato una medida de la tercera clase de efectos que hemos distinguido en la estructura causal. Del mismo modo, el criterio usual de atender a la magnitud del coeficiente de determinación total para decidir acerca de la validez del modelo, precisamente es útil en un contexto explicativo en cuanto diferencia esa última fuente de variación de las restantes. No obstante, él es insuficiente en razón de que su sola aplicación esconde la importancia relativa de los otros tipos de efectos, es decir, los propios de cada una de las variables explicativas y del impacto conjunto.

Para diferenciar estas dos últimas clases de resultados, procedemos a descomponer la varianza explicada de la siguiente manera:[24]

$$(9) \qquad \text{Var. Explic.} = \text{Var. Explic. por } X + \text{Var. Explic. por } Z \\ + \text{Var. Explic. Conj por } X \text{ y } Z$$

Los dos primeros componentes a la derecha del signo igual dan cuenta de la importancia relativa que tienen los efectos propios de las variables explicativas, en tanto que el último mide el peso relativo de la acción conjunta de X y Z sobre Y. En consecuencia, el modelo de regresión elegido tiene la capacidad de distinguir entre las diversas clases de efectos implicados por la cadena causal, a diferencia de lo que acontece con el sistema de ecuaciones previamente analizado.

Si dividimos la ecuación (9) por la varianza total de Y, obtenemos como resultado el coeficiente de determinación R^2, el cual se interpreta como el porcentaje de la varianza total de Y que es explicada por medio de las variables X y Z. Sin embargo, desde el punto de vista del modelo causal considerado es necesario establecer una precisión adicional: el R^2 contiene, de una parte, la contribución propia de cada una de las

[24] **Para esta descomposición de la varianza véase Duncan, *op. cit.* y la fórmula de la nota 3 de la pág. 18.**

variables explicativas y, de otra, su aporte conjunto. Según hemos señalado, la lógica de la explicación causal lleva a rechazar el tipo de efecto, en el cual no es posible discernir la contribución original de las variables que operan como causas explícitas.

A partir de este análisis se deriva la conclusión de que la utilización de un modelo de regresión parcial como instrumento de validación de una estructura causal hipotética debe atender a la importancia relativa de aquellos efectos en que se confunden las operaciones de varias variables explicativas como criterio fundamental para decidir acerca de la bondad del modelo causal postulado. Así, aun cuando se obtenga un coeficiente de determinación cercano a 1 —esto es, se estaría "explicando" casi un cien por ciento de la variabilidad de Y—, puede acontecer que el peso del efecto conjunto de X y Z de hecho constituya el componente más importante en la partición de la varianza explicada, mientras que los nexos causales propiamente tales sólo cumplan un papel marginal. Si ese es el caso hay que concluir que el intento de validar el modelo causal no ha sido exitoso, *pese a la gran magnitud del coeficiente de determinación.*

La diferencia impuesta por el punto de vista adoptado —explicación o predicción— se hace así patente. Cuando la finalidad perseguida es el pronóstico, poco importan las posibles fuentes de origen de la varianza explicada: lo que se busca es simplemente un R^2 lo más alto posible, dada su íntima conexión con la varianza del predictor (Var P) y, por ende, con la amplitud del intervalo de predicción. En cambio, en el ámbito de la explicación causal es esencial individualizar los distintos componentes de la varianza explicada, dado que el criterio de rechazo o no rechazo del modelo causal se apoya en el peso relativo que tienen los efectos propios, con exclusión de aquellos impactos en que se confunden varias variables.

La forma de computar los diversos componentes en que se particiona la varianza explicada está dada por las siguientes expresiones:

(10) $$\text{Var. Explic. por } X = m^2_1 \text{ Var } (X)$$

(11) $$\text{Var. Explic. por } Z = m^2_2 \text{ Var } (Z)$$

(12) $$\text{Var. Explic. Conj. por } X \text{ y } Z = 2m_1m_2r_{XZ}S_XS_Z$$

donde Var(X) y Var(Z) son las respectivas varianzas de las variables [25] y S_X y S_Z son las desviaciones típicas.

Hay algunos aspectos de estas expresiones que interesa destacar. Debido a que las tres representan contribuciones a la varianza explicada necesariamente deben ser negativas; esto es evidente en el caso de (10)

[25] Hay que destacar que todo el desarrollo que se presenta se plantea al nivel poblacional, salvo que explícitamente se señale lo contrario.

y (11), pero también se cumple para (12) puesto que si alguno de los tres términos que pueden adoptar valores negativos —m_1, m_2 o r_{XZ}— lo hace, entonces de los dos restantes uno será necesariamente negativo y el otro positivo. Así, por ejemplo, si el efecto de *X* sobre *Y* es negativo (m_1 menor que cero) y el impacto de *Z* sobre *Y* es positivo (m_2 mayor que cero), necesariamente debe haber una correlación negativa entre ambas variables explicativas

Además, la expresión (12) nos permite investigar el papel que desempeña la acción conjunta de *X* y *Z* en la evaluación del modelo causal. Desde el punto de vista de la validación de este último, la situación ideal es aquélla en que ese efecto no existe, esto es, cuando (12) es igual a cero. El único elemento del producto bajo consideración que puede adoptar el valor cero es r_{XZ}, ya que si S_X y S_Z fuesen nulas no habría posibilidad de contrastación empírica —*X* y *Z* serían constantes y no variables—, y de adoptarlo m_1 o m_2 tendríamos una razón suficiente para rechazar el modelo.

El caso especial en que r_{XZ} es igual a cero, está representado gráficamente en la figura 2-b y, además en esta situación podemos emplear indistintamente el modelo de regresión (2) o el sistema formado por (6) y (7), como simbolizaciones adecuadas de la estructura causal. Esto se deriva de considerar las fórmulas:

$$(13) \qquad m_1 = \frac{r_{XY} - r_{ZY}\, r_{XZ}}{1 - r^2_{XZ}} \cdot \frac{S_Y}{S_X} \qquad \text{y}$$

$$(14) \qquad m_2 = \frac{r_{ZY} - r_{XY}\, r_{XZ}}{1 - r^2_{XZ}} \cdot \frac{S_Y}{S_Z}$$

donde m_1 y m_2 son los parámetros del modelo de regresión parcial (2). Si r_{XZ} es igual a cero estas expresiones devienen en:

$$m_1 = r_{XY}S_Y/S_X \qquad \text{y,}$$

$$m_2 = r_{ZY}S_Y/S_X$$

Por otra parte, se sabe que si se expresan los parámetros *b* y *d* de las ecuaciones (6) y (7) en términos de coeficientes de correlación y desviaciones típicas, se llega al siguiente resultado:

$$b = r_{XY}S_Y/S_X \qquad \text{y,}$$

$$d = r_{ZY}S_Y/S_Z$$

Estas ecuaciones demuestran que los vínculos causales del diagrama 2-b pueden ser simbolizados indiferentemente por m_1 y m_2, o por *b* y *d*. La racionalidad de este resultado se explica por el hecho de que al no existir factores comunes a *X* y *Z*, no hay necesidad de mantener constante la variable *X* (o la variable *Z*) para capturar el impacto causal propio de *Z* (o de *X*) sobre *Y*.

Adicionalmente, ambos modelos de regresión arrojan resultados equivalentes al evaluar el peso relativo en la explicación de los nexos causales postulados. Este hecho se puede apreciar al considerar la forma que adopta el coeficiente de determinación total (R^2) en el caso del modelo (2):

$$(15) \qquad R^2 = \frac{r^2_{XY} + r^2_{ZY} - 2r_{XZ}r_{XY}r_{ZY}}{1 - r^2_{XZ}}$$

Cuando no existe correlación entre *X* y *Z* esta expresión se transforma en:

$$R^2 = r^2_{XY} + r^2_{ZY}$$

Por otra parte, los coeficientes de determinación en el caso de (6) y (7) son precisamente los cuadrados de r_{XY} y r_{ZY} respectivamente. En consecuencia, el coeficiente de determinación del modelo (2) es igual a la suma de los coeficientes de determinación del modelo representado por (6) y (7).

El caso límite opuesto al recién examinado es aquel en que r^2_{XZ} es igual a 1. En esta situación extrema, se puede constatar que tanto los parámetros del modelo de regresión parcial, como su coeficiente de determinación, no están definidos, según resulta de la simple inspección de (13), (14) y (15).

Desde el punto de vista de la lógica causal es fácil interpretar este resultado. Cuando la correlación entre las variables explicativas es igual a 1, toda la variación en ellas se debe únicamente a la acción de los factores comunes: cada vez que *X* experimenta un cambio también lo hace *Z* y viceversa. En otras palabras, no existen factores que actúen *sólo* sobre *X* o *Z*, lo que hace imposible hacer variar una de las variables explicativas manteniendo constante la otra.

Desde otro ángulo, podemos decir que la actuación de *X* y *Z* se presenta siempre confundida, impidiendo así individualizar los que podrían ser sus efectos propios. En rigor, sería inadecuado hablar en este caso de que X es causa de *Y*, o de que *Z* es causa de *Y*, aun en el nivel del modelo causal hipotético, puesto que hemos reservado la noción de vínculo causal para designar los efectos propios *identificables* de las variables explicativas, y la de explicación causal para aquel análisis cuyo objetivo *esencial* reside precisamente en la individualización de esos nexos.

En análisis de regresión, este caso extremo es conocido con el nombre de problema de multicolinealidad perfecta y ha sido objeto de un extenso tratamiento.[26] En el ámbito de la predicción Var(P), al igual que los parámetros y el coeficiente de determinación, queda indeterminado. En estos contextos el problema encuentra una solución en la eliminación de cualquiera de los dos regresores. De este modo, se pasa desde una amplitud de intervalo de predicción indefinida a otra necesariamente "menor"; de esta forma, respetamos el criterio de decisión consistente en seleccionar aquel modelo que proporcione una mínima Var (P).

Es de suponer que en la gran mayoría de las investigaciones la correlación entre *X* y *Z*, aun cuando sea muy elevada, difícilmente alcanzará un valor absoluto unitario. Sin embargo, desde el punto de vista causal, la presencia de un r^2_{XZ} relativamente elevado ocasiona dificultades, según lo hemos indicado extensamente en reiteradas oportunidades. El criterio para determinar cuán elevado es r^2_{XZ} dependerá del contexto específico de cada investigación; el investigador procederá a particionar la varianza explicada de la manera antes señalada y decidirá cuán satisfactorio o insatisfactorio es el modelo en términos del peso relativo que tiene la operación conjunta de *X* y *Z*.

Existe una práctica viciada en la investigación social que consiste en reaccionar a un r^2_{XZ} considerado como insatisfactorio, debido a su gran magnitud, mediante la eliminación de una de las variables explicativas para proceder a estimar los vínculos causales mediante regresiones simples de *Y* sobre *X* y de *Y* sobre *Z*. La idea que subyacería a este procedimiento es la de que, de esta manera, se estaría evaluando los impactos causales en su *"pureza"*, evitando las dificultades generadas por la colinealidad entre las variables explicativas.

Goldberg[27] ha demostrado que esta estrategia, en el *dominio de la explicación,* es errónea. Sabemos que la representación adecuada de 2-a es:

$$(16) \qquad Y_i = m_1X_i + m_2Z_i + U_i$$

donde las variables se han expresado como desviaciones respecto a sus correspondientes medias aritméticas.

Si evaluamos el nexo causal entre *Y* y *X* mediante una regresión simple de ambas variables, estamos preguntándonos por el valor esperado de *Y,* dado *X*. La expresión para esta esperanza es:

$$(17) \qquad E(Y_i/X_i) = (\text{Cov.}X,Y/\text{Var } X)\ X_i$$

Ahora bien, de (16) se tiene que la covarianza entre *X* e *Y* se puede expresar como:

[26] Véase, por ejemplo, Johnston, *op. cit.*, o cualquier libro de texto de Econometría.
[27] Véase, Goldberger, *op. cit.*

$$(18 \qquad \text{Cov.X,Y} = m_1 \text{Var X} + m_2 \text{Cov.X,Z}$$

Remplazando (18) en (17), Goldberg concluye que la expresión para el valor esperado de *Y* dado *X* es:

$$(19) \qquad E(Y_i/X_i) = (m_1 + m_2 \frac{\text{Cov.X,Z}}{\text{Var X}}) X_i$$

La simple inspección de (19) lleva a concluir que el procedimiento empleado conduce a una evaluación errónea de la magnitud del vínculo causal desde *X* hacia *Y*. En efecto, esa magnitud está reflejada por el parámetro m_1 y la estrategia lleva, mediante el expediente de la regresión de *Y* sobre *X*, a asignarle un peso distinto donde se mezclan tanto los efectos propios de *X* como aquellos que se ejercen juntamente con *Z*. Debe recordarse que la utilización de este procedimiento implica incluir el efecto propio de *Z* en la acción de la variable U.

Hay que enfatizar que el desarrollo precedente no considera todas aquellas cuestiones que pertenecen al dominio de la inferencia estadística, y que se relacionan con el problema de la multicolinealidad, por cuanto el análisis de Goldberg se ubica en el nivel estrictamente poblacional. La tradición en el pensamiento estadístico y econométrico ha puesto el acento precisamente en los problemas inferenciales, destacando el impacto negativo de la relación entre las variables explicativas para la obtención de estimaciones precisas.

Así, por ejemplo, Theil [28] ha abordado el problema en el contexto de lo que se denomina Análisis de Especificación. La pregunta central desde esta óptica inquiere por el efecto que tiene sobre las *estimaciones* de los parámetros la no inclusión, en el modelo de regresión, de una o más variables relevantes. Theil concluye que esta omisión conduce a un sesgo en la estimación. En el ejemplo que hemos examinado hasta ahora, el error de especificación se produciría al eliminar del análisis la variable *X* o la variable *Z*, ya que hemos hipotetizado que ambas son relevantes para la explicación de *Y*.

La preocupación por los problemas de estimación ha llevado a buscar soluciones para la colinealidad estrecha en la posibilidad de acopiar mayor cantidad de información, para las mismas variables, mediante la utilización de muestras de mayor tamaño. Esta posición ha sido sintetizada por Johnston [29] del siguiente modo:

> Si resulta que la multicolinealidad es un problema serio en el sentido de que las estimaciones de los parámetros se caracterizan por tener un

[28] Theil H., "Specification Errors and the Estimation of Econometric Relationships", en *Rev. Intern. Statist. Inst.*, vol. 25, 1957, pp. 41-51.
[29] Johnston, *op. cit.*, p. 164.

grado insatisfactoriamente bajo de precisión, el análisis estadístico se encuentra en una situación equivalente a la de no poder fabricar ladrillos por carecer de paja. El remedio esencialmente consiste en la adquisición, cuando ello es posible, de información y datos nuevos, que nos permitan escapar del callejón sin salida de la multicolinealidad. Así, por ejemplo, los primeros estudios sobre demanda, los cuales se basaban en series cronológicas, a menudo tropezaban con dificultades provenientes de la correlación entre las variables explicativas, ingreso y precios, a lo que se añadía la variación inadecuada de las series del ingreso. La utilización de datos sobre presupuestos familiares provenientes de investigaciones de secciones transversales, al proporcionar rangos de variación más amplios para el ingreso, han permitido obtener estimaciones más o menos adecuadas del coeficiente asociado a la variable ingreso, las cuales pueden ser entonces empleadas en el análisis de las series cronológicas.

Nos parece que en el ámbito de la explicación causal, el énfasis *primordial* debe recaer no tanto en los problemas inferenciales sino en la capacidad del modelo de regresión escogido para reflejar los rasgos esenciales de la estructura causal hipotetizada. Desde este otro punto de vista, la crítica que se puede dirigir hacia las regresiones de Y sobre X e Y sobre Z, no apunta hacia la presencia de un posible sesgo en las estimaciones, sino más bien al hecho de que el problema de la validez de los vínculos causales postulados se decidirá considerando magnitudes en las que se combinan espuriamente varias clases de efectos más fundamentales. En palabras de Goldberger:[30]

> Hay tres casos clásicos en los que la regresión mínimo cuadrática de Y sobre X es un procedimiento inadecuado de estimación. Los economistas se inclinan por describir estas situaciones señalando que las estimaciones mínimo cuadráticas están sesgadas. Sin embargo, es mucho más instructivo conceder que las estimaciones mínimo cuadráticas proveen estimaciones insesgadas de la función de esperanza condicional $E(Y/X)$. La objeción a la regresión mínimo cuadrática descansará entonces en la afirmación de que los parámetros de $E(Y/X)$ no corresponden a los parámetros fundamentales del mecanismo que ha generado las observaciones.
> Los tres casos referidos involucran (i) variables no observables (= errores de medición), (ii) simultaneidad (= causación recíproca), (iii) variables omitidas (= control inadecuado).

El último caso indicado, esto es, el de las variables omitidas, es justamente el que hemos examinado.

Cabe, entonces, preguntar acerca de las estrategias legítimas a seguir, cuando la magnitud de r_{XZ} es tal que el investigador decide rechazar el modelo causal hipotetizado. En nuestro ejemplo, podemos imaginar dos

30 Goldberger, *op. cit.*, p. 2.

posibilidades. La primera consiste en ampliar el modelo, mediante la individualización de los factores comunes a X y Z, que dan cuenta de la variación concomitante de estas variables. Ello significa postular una nueva estructura causal en la cual, por ejemplo, tendríamos una variable adicional W —la que debe ser incorporada al interior del discurso causal— que operaría como causa de X y Z. Lo más probable es que el modelo requiera de la inclusión de más de una nueva variable, lo que traerá consigo una complejidad creciente.

La justificación de la estrategia de ampliación del modelo reside en el objetivo perseguido por la explicación causal. Según se ha indicado, la finalidad buscada en este tipo de análisis es la individualización de vínculos causales de manera tal que sea posible atribuir el máximo alcanzable de la varianza observada a variables bien *específicas,* esto es, a "causas" contempladas y conceptualizadas de manera explícita en el discurso. Mediante la expansión del modelo obtenemos precisamente ese resultado: descomponemos la correlación r_{XZ}, primitivamente atribuida a factores implícitos, en efectos propios de las nuevas variables. [31]

La nueva estructura causal postulada requerirá, en términos de su validación, de una traducción a modelos de regresión adecuados, donde el criterio para evaluar la buena correspondencia entre regresión y diagrama causal es análogo al que hemos examinado anteriormente. Estos modelos de regresión constituirán sistemas de ecuaciones interdependientes, los cuales acarrean consigo una serie de problemas adicionales y nuevos que escapan con creces al dominio de la teoría tradicional de la regresión múltiple.

La alternativa de expansión del modelo constituye, por lo demás, una buena estrategia para abordar el problema de la multicolinealidad, en términos un tanto diferentes a las formas tradicionales de encararlo. Sin embargo, si se opta por esta vía, hay ciertos costos adicionales, puesto que el investigador se verá en la necesidad de realizar un mayor esfuerzo, de índole más teórico, tendiente a individualizar y conceptualizar las nuevas variables relevantes para el análisis explicativo.

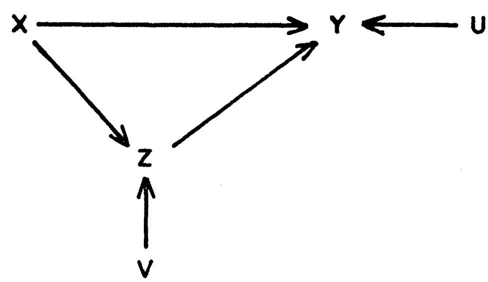
En el caso de un rechazo del modelo causal representado por 2-a originado por un r_{XZ} que es evaluado como insatisfactorio, existe una segunda estrategia posible, distinta de la recién examinada. Ella consiste en abandonar la interpretación puramente "correlacional" del coeficiente, para entrar a atribuirle un contenido causal. Concretamente, esto signi-

[31] Por otra parte, esta es la idea central en el análisis de trayectorias *(path analysis)*. La exposición más clara de la teoría básica en este tipo de análisis se encuentra en Li Ching Chun, *Population Genetics,* The University of Chicago Press, 1955, pp. 144-171. La presentación más difundida es la de Land K. C., "Principles of Path Analysis", en *Sociological Methodology 1969,* Borgatta E. P., editor, Jossey Bass Inc. San Francisco, 1969, pp. 3-37. También se puede consultar Elza Berquó y Rubens Murillo Márques, "Consideracões sobre Modelos Causais", en *Estudos* Cebrap 11, Sao Paulo 1975, pp. 91-121.

fica remplazar la estructura causal postulada por una nueva, en la que alguna de las variables explicativas pasa a desempeñar el papel de antecedente de la otra. Así, por ejemplo, si suponemos que X es causa de Z, obtendríamos un modelo cuya representación gráfica es la siguiente:

GRÁFICO 3

Estructura causal en que X y Z operan sobre Y, y Z es causado por X



Si se compara el diagrama 2-a con el gráfico 3, salta a la vista que la diferencia esencial radica en la sustitución del segmento curvilíneo bidireccional, que simboliza una correlación, por una flecha desde X hacia Z, representativa de un vínculo causal. La opción por un modelo causal de esta índole supone la existencia de razones, más o menos teóricas, que hagan plausible la hipótesis de que X tiene un efecto *propio* sobre Z. Constituiría un grave error postular la existencia de ese impacto causal meramente sobre la base de una correlación alta entre ellas; muy por el contrario, es necesario contar con razones sustantivas sólidas que apoyen la opción por esta hipótesis en contra de aquella que explica la relación por apelación a factores comunes a las variables.

En síntesis, la existencia de una alta correlación observada entre X y Z admite dos tipos alternativos de interpretación. De una parte, dicha asociación se puede explicar hipotetizando la presencia de factores comunes. Puesto que ellos deben ser incorporados de manera explícita en el modelo, si pretendemos obtener una *real* explicación causal, la primera interpretación conduce a una ampliación de la estructura causal considerada. Por otra parte, puede que existan fuertes razones teóricas para otorgar a la correlación contenido causal, lo que nos lleva a sustituir el gráfico 2-a por 3. Un alto valor de r_{XZ} nos pone en la encrucijada de tener que optar por una explicación causal que recurra a la ampliación del modelo o a una en que se establezca una conexión direccional entre X y Z. La única salida consiste en contrastar las *razones teóricas* que justifiquen hipotetizar uno u otro y decidir en consecuencia.[32]

La contrastación empírica de la nueva estructura causal, supone determinar una representación de ella, mediante un modelo de regresión que cumpla con las condiciones anteriormente indicadas, esto es, que refleje adecuadamente el contenido causal postulado. Previamente, vale la pena mostrar cómo la regresión elegida para la validación del modelo diagramado en el gráfico 2 no es satisfactoria en esta nueva situación.

En el modelo causal del gráfico 3, prescindiendo por ahora de las fuentes de variación de Y y de Z que operan con independencia de todos los restantes factores, el movimiento de la variable explicada tiene tres orígenes distintos: i] el efecto directo de X, simbolizado por la flecha desde X hacia Y; ii] el efecto directo de Z sobre Y, representado por la flecha que une Z e Y; y iii] el impacto de X sobre Y, a través de Z, resultante del hecho de que ahora X es antecedente de Z.

A su vez, la variación en Z obedece a factores implícitos y no relacionados con las restantes variables del sistema, representados por el término estocástico V, y al vínculo sistemático que se origina en la acción de X sobre Z. Este efecto propio de X sobre Z constituye la novedad, que diferencia esta estructura causal de la considerada anteriormente.

La presencia de este nuevo nexo conduce a que el impacto total de X sobre Y admita la descomposición en un efecto directo al que se agrega otro de naturaleza indirecta. Gráficamente, este último tipo de impacto resulta del acoplamiento del vínculo causal desde X a Z con el de Z a Y.

El modelo de regresión (2) nos permitiría establecer una correspondencia entre m_1 y m_2 con los efectos propios de X y Z sobre Y respectivamente, pero nos deja en la imposibilidad de incorporar, de manera específica, el impacto indirecto característico de este modelo. En consecuencia, se hace necesario individualizar un modelo de regresión capaz de capturar y distinguir todos los tipos de conexiones causales presentes.

El siguiente sistema de ecuaciones interdependientes constituye una representación adecuada del esquema causal bajo examen.[33]

$$(20) \qquad Y_i = m_0 + m_1X_i + m_2Z_i + U_i$$

$$(21) \qquad Z_i = n_0 + n_1X_i + V_i$$

32 Sin embargo, si se relaciona el signo de la correlación observada con el sentido que tendría el vínculo causal hipotetizado cuando se opta por otorgarle un contenido causal, ello puede constituir una prueba empírica e inmediata que lleve a acoger esta alternativa o a decidirse por la ampliación del modelo.

33 Indudablemente, el pasaje desde la representación gráfica de la estructura causal al sistema de ecuaciones correspondiente, plantea problemas en términos de contar con un conjunto de reglas o algoritmos que permitan hacerlo de manera rutinaria y mecánica. En este trabajo hemos descansado en consideraciones intuitivas, sin embargo, existen demostraciones de la existencia de isomorfismos entre álgebras gráficas y álgebras literales. Véase por ejemplo Cortés, Przeworski y Sprague, *System Analysis for Social Scientists*, John Wiley, New York, 1974.

Podemos demostrar, de manera simple, que el sistema formado por (20) y (21) captura, convenientemente el esquema causal hipotetizador, recurriendo al mismo tipo de argumentación que utilizamos en el caso del modelo de regresión (2).

Investiguemos primero qué acontece en el sistema cuando se producen variaciones en *X*. Para ello, supongamos que *X* asume el valor X_0. Dada la relación (21), *Z* adoptará un valor Z_0 dado por:

$$Z_0 = n_0 + n_1X_0 + V$$

Si *X* experimenta un incremento unitario tendremos un valor Z_1:

$$Z_1 = n_0 + n_1(X_0 + 1) + V$$

Si consideramos la diferencia entre Z_1 y Z_0, encontramos que:

$$Z_1 - Z_0 = n_1$$

Por consiguiente, el parámetro n_1 se puede interpretar como el efecto directo que acarrea un cambio unitario en *X* sobre la variable *Z*.

Para obtener el valor de *Y* cuando *X* es igual a X_0, es necesario recordar que al valor X_0 corresponde un valor Z_0 de *Z*, el cual se infiere de (21). Por tanto, se puede expresar la magnitud Y_0 adoptada por *Y* como:

$$Y_0 = m_0 + m_1X_0 + m_2Z_0 + U$$

Al producirse el incremento unitario en *X*, ello trae consigo el efecto sobre *Z* recién examinado y, además, *Y* asumirá un valor Y_1 dado por:

$$Y_1 = m_0 + m_1 (X_0 + 1) + m_2Z_1 + U$$

Al hacer la diferencia entre ambos valores de *Y* se obtiene:

$$Y_1 - Y_0 = m_1 + m_2(Z_1 - Z_0)$$

Pero la discrepancia entre Z_1 y Z_0 constituye el impacto directo de *X* sobre *Z*, y es igual a n_1. Por lo tanto:

$$Y_1 - Y_0 = m_1 + m_2n_1 \tag{22}$$

En consecuencia, la variación de *X* en una unidad conduce a un efecto complejo sobre *Y*, que es el resultado de adicionar a la magnitud del impacto directo de *X* sobre *Y* (m_1), el producto m_2n_1. Sabemos que el último parámetro en este producto refleja el efecto directo de los cambios unitarios en *X* sobre *Z*; sólo resta interpretar m_2 para poder otorgar un significado causal a m_2n_1.

La variable endógena Z [34] admite no sólo variaciones a consecuencia de cambios en X, sino que también puede fluctuar independientemente en razón de variaciones en sus factores propios, simbolizados por V. Supongamos entonces que Z experimenta un cambio unitario originado en V, permaneciendo constantes todos los restantes elementos del sistema. Ello conducirá a una diferencia entre el valor primitivamente adoptado por Y y el resultante del cambio unitario en Z, igual a:

$$Y^1 - Y^0 = m_2$$

De esta manera, podemos interpretar el parámetro m_2 como la expresión de los impactos directos sobre Y producidos por variaciones en Z. Cabe destacar que la posibilidad de diferenciar este nexo causal de los restantes elementos que componen el sistema está condicionada, en virtud de la argumentación inmediatamente anterior, por el supuesto de que existen fuentes de variación de Z que son independientes del movimiento en X. Si esta hipótesis no se cumple —esto es, si r_{XZ} es igual a 1— entonces será imposible identificar un efecto propio de Z sobre Y y, por añadidura, se puede demostrar que ello implica la indeterminación de todo el sistema. [35]

Estas consideraciones permiten otorgar al producto m_2n_1 un contenido causal preciso; él refleja el encadenamiento de dos operaciones sucesivas: en una primera fase, se tiene una variación de X que se trasmite hacia Z en una cierta proporción n_1; en la segunda fase, esta proporción, que constituye el cambio experimentado por la variable explicativa Z, se trasmite ahora hacia Y en una proporción m_2. Por consiguiente, la magnitud del efecto sobre Y de la variación en X, alcanzado a través de Z, es la proporción m_2n_1 del cambio primitivo experimentado por la variable explicativa. El producto en cuestión mide entonces, la magnitud del impacto indirecto de X.

Ahora bien, si se desea investigar el efecto *total* que tiene X sobre Y, es necesario expresar Y sólo en función de X, eliminando así la variable intermedia. Para obtener dicha función basta remplazar (21) en (20).:

$$(23) \qquad Y_t = (m_0 + m_2n_0) + (m_1 + m_2n_1)X_t + (U_t + m_2V_t)$$

La ecuación (23) es conocida en la literatura econométrica [35] como la ecuación reducida del sistema formado por (20) y (21). Según se obser-

[34] La distinción entre variables endógenas y exógenas es clásica en la literatura econométrica. En general, variable endógena es aquella que se determina al interior del sistema de ecuaciones, vale decir, juega el papel de una incógnita en el conjunto de ecuaciones. De otra parte, las variables exógenas constituyen datos.

[35] Ver ecuaciones (13) y (14) y las igualdades de la cita 2, pág. 10.

[36] Para un análisis minucioso del concepto de ecuación reducida y sus interpretaciones en términos de efectos se puede consultar a Theil H., *Principles of Econometrics*, John Wiley, New York, pp. 463-468.

va, el impacto total originado por los cambios en X se refleja en el parámetro asociado a ellas. En virtud de los contenidos causales vinculados a m_1 y m_2n_1, resulta que el impacto total en cuestión formado por la suma de los dos tipos de efectos que caracterizan a X: directo, medido por m_1, y el indirecto a través de Z capturado por m_2n_1.

El rasgo esencial que caracteriza todo el análisis efectuado hasta ahora, reside en que hemos logrado establecer una correspondencia entre los diversos aspectos de la estructura causal postulada con las notas formales del sistema constituido por las igualdades (20) y (21). Por lo tanto, él incorpora adecuadamente todas las clases de efectos que se distinguen en el modelo causal. Estas ecuaciones se conocen con el nombre de *ecuaciones estructurales,* denominación que se explica por cuanto los parámetros contenidos en ellas están en relación biunívoca con los efectos propios fundamentales de las variables contenidas en el esquema causal.

Por otra parte, las ecuaciones estructurales conducen a una tercera igualdad: la ecuación reducida. En ella, el coeficiente que aparece afectando a X resulta ser una combinación de los parámetros fundamentales, y en este sentido, si bien permite investigar el efecto total que tiene X sobre Y, no entrega información respecto a los nexos causales básicos —esto es, los impactos de X sobre Y, de X sobre Z y de Z sobre Y— que constituyen la hipótesis causal.

La distinción entre ecuaciones estructurales y forma reducida nos es útil para subrayar una diferencia adicional entre predicción y explicación. Supongamos que se intenta pronosticar Y a partir de X y Z y que se ha incurrido en problemas originados en la gran magnitud de r_{XZ}. En este caso, podría optarse por predecir eliminando la variable Z, lo que equivale a emplear la forma reducida como la ecuación de regresión de Y sobre X.

Es muy posible que, si atendemos al criterio consistente en seleccionar aquel modelo que entregue el intervalo de predicción de amplitud mínima, el procedimiento esbozado sea el más conveniente para efectuar el pronóstico.
Sin embargo, en el ámbito de la explicación el empleo exclusivo de la forma reducida no nos capacitaría para realizar la validación del modelo causal, puesto que sólo conoceríamos el efecto total de X sobre Y y no estaríamos en posición de diferenciar los efectos primarios propios de cada variable explicativa. Hay que tener presente que ese resultado es contradictorio con el objetivo principal del análisis causal, el cual reside, precisamente, en la validación de la hipótesis mediante la individualización de los nexos causales elementales constitutivos del modelo.

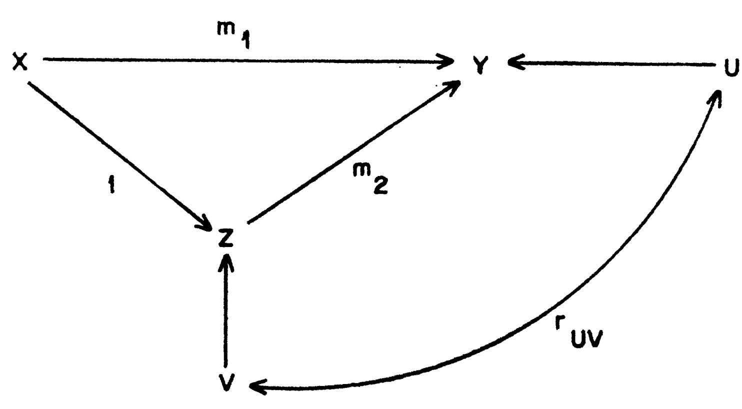
A partir de los parámetros de las ecuaciones estructurales, es posible construir aquellos que caracterizan a las ecuaciones reducidas. No obstante, lo inverso no es necesariamente cierto, esto es, el conocimiento de los coeficientes de las formas reducidas no siempre permite obtener los parámetros fundamentales. El problema consistente en la posibilidad de transitar desde los parámetros de las ecuaciones reducidas hacia los coeficientes de las ecuacionees estructurales se conoce, técnicamente, con el nombre de *problema de identificación,*[37] el cual es importante en el ámbito de la explicación causal por cuanto en numerosos casos la validación de la hipótesis implica necesariamente computar los efectos elementales a partir de los efectos totales.

Esta es la situación que se presenta al intentar validar la estructura causal bajo análisis. El modelo cuyo gráfico es el núm. 3 y sus ecuaciones (20) y (21) se encuentra subidentificado, esto es, en principio no es posible conocer los parámetros de las ecuaciones estructurales a partir de la forma reducida. Por otra parte, la utilización de la forma reducida es imprescindible para llegar a conocer los parámetros fundamentales. Este es el planteo clásico del problema de identificación, y en lo que sigue intentaremos indicar las vías para su solución. Sin embargo, hay que destacar que nuestra exposición descansará fundamentalmente en argumentos de naturaleza intuitiva, rehuyendo el desarrollo más formal en cuanto sea posible.

Para simplificar la exposición, supongamos que las variables se expresan como puntajes típicos, lo que nos permite eliminar los coeficientes de posiciones de las ecuaciones (20) y (21). Además, utilicemos el hecho ya demostrado de que los coeficientes angulares representan los nexos causales entre las variables que componen la estructura, lo que nos permite ilustrar el desarrollo mediante el siguiente gráfico:

GRÁFICO 4

Estructura causal donde X y Z operan sobre Y, Z es causado por X, y los nexos corresponden a los parámetros fundamentales. Todas las variables se miden en puntajes típicos



[37] La obra clásica sobre este tema es la de Fisher F. M., *op. cit.*

Puesto que las variables se miden en puntajes estándares (típicos), el sistema de ecuaciones que representa al modelo es el siguiente:

$$(24) \qquad Y_i = m_1X_i + m_2Z_i + U_i$$

$$(25) \qquad Z_i = n_1X_i + V_i$$

Supongamos que nos encontramos en una situación de tipo experimental, esto es, estamos en condiciones de manipular cualquiera de las variables manteniendo constantes las restantes. Ello implica admitir que el experimento se ha diseñado de manera tal que no hay variaciones concomitantes entre V y X, U y X ni U y V.

Podríamos, por ejemplo, operar sobre la variable V de manera de hacer variar Z; puesto que todo el resto del sistema permanece inalterado, nos bastaría con observar las variaciones de Y concomitantes con las de Z para estar en posición de evaluar la magnitud del efecto propio de Z sobre Y (m_2).

De la misma manera, podríamos manipular X y observar los correspondientes cambios en Z. Como hemos partido del supuesto de que las restantes variables están bajo control experimental, la variación conjunta de ellas nos llevará a computar, de manera inmediata, el nexo causal n_1. Sin embargo, la variación en X no nos permitiría evaluar directamente el efecto propio de X sobre Y, por cuanto, al producir *necesariamente* cambios en Z, la concomitancia entre X e Y incluye tanto el efecto directo como el indirecto de X sobre Y.

Sabemos que estos dos tipos de impactos se combinan linealmene para formar el efecto total de X sobre Y, según la siguiente expresión:

Efecto total de X sobre $Y = m_1 + m_2n_1$

Puesto que podemos evaluar, sin ninguna dificultad m_2n_1 y la magnitud del efecto total, el cómputo de m_1 se sigue de inmediato.

En el contexto no experimental, que es la situación normal en el tipo de investigación social que nos interesa, es imposible manipular las variables de la manera en que se hace en el ámbito de la experimentación. En términos de la validación del modelo causal, la única posibilidad es la de *observar* los valores de las variables aleatorias X, Y y Z. Además, las variables aleatorias U y V no son observables, aun cuando es usual suponer que ellas no se encuentran correlacionadas con la variable exógena X.

Frente al problema de evaluar los parámetros de las ecuaciones estructurales (24) y (25), existe una solución aparente que se presenta como bastante plausible a primera vista. Ella consistiría en llevar a cabo las regresiones de Y sobre X y Z, y de Z sobre X, estableciendo una correspondencia entre los resultados y los parámetros fundamentales.

Dejando de lado los posibles problemas de estimación que plantearía el procedimiento recién descrito,[38] la naturaleza de los datos que se emplearían para ajustar (24) indica desde ya que no lograríamos obtener un cómputo satisfactorio de los parámetros fundamentales m_2 y m_1: la variación en los valores observados de Z que se utilizan en el ajuste del modelo responden, según sabemos, a distintas fuentes; en algunos casos, se tratará de valores producidos solamente por la variación en V, mientras que en otros estaremos en presencia de magnitudes que recogen el efecto de X, o bien, y esto es lo más probable, se tratará de valores que incorporan impactos de ambas fuentes.

La diferencia con la situación experimental reside en la imposibilidad de efectuar un control *real* de las distintas fuentes de variación. En el contexto no experimental, normalmente no es posible distinguir si la variación observada en Z se debe a X o a V, lo que conduce a que el ajuste de la ecuación (24) se realice sobre la base de los valores de Z que probablemente sean el resultado de la combinación de las distintas causas. Además, hay que destacar que se ignora qué tipo de combinación de causas constituyen cada uno de los valores observados de Z.

Como consecuencia, se tiene que el ajuste mínimo cuadrático de (24) arrojará como resultado valores que no representan efectos propios ni efectos totales. Esta misma conclusión se obtiene del examen del gráfico 4. Si cambian simultáneamente X y V, no será posible distinguir el efecto propio de Z (m_2) debido a que la variación en Y que aparece en concomitancia con el Z observado responde también, tanto al impacto propio de X (m_1) como a su efecto indirecto a través de Z (m_2n_1). A su vez, tampoco se puede distinguir el efecto propio de X, ya que la variación en Y asociada con el X observado obedecerá del mismo modo tanto a su acción indirecta como a efectos propios de Z.

Por otra parte, podría pensarse que el ajuste mínimo cuadrático de (24) sería exitoso para evaluar el efecto total de X, de modo tal que cabría interpretar el coeficiente que afecta a X como su reflejo adecuado. Esto no es así, ya que pueden existir observaciones en que al movimiento de X se añadan variaciones en V, lo que conduciría a adicionar a ese impacto total efectos propios de Z.

En síntesis, la regresión de Y sobre X y Z probablemente entregue como resultado unos coeficientes en los que se mezclan, en proporciones desconocidas, los efectos de las distintas fuentes de variación. En sentido lato, esta es la sustancia de lo que se conoce como problema de identificación.

Corresponde entonces preguntarse acerca de qué efectos, y debidos a cuáles fuentes de variaciones, podemos identificar y cómo hacerlo.

En primer lugar, es factible conocer el impacto propio de X sobre Z.

[38] El principal problema de estimación que se presenta en este caso es el de correlación entre el regresor y el término de error. Su consecuencia es la de entregarnos estimadores inconsistentes.

Para hacerlo, basta con realizar la regresión de *Z* sobre *X*, esto es, proceder al ajuste mínimo-cuadrático de (25). En este caso, no hay posibilidad de confundir la actuación de las distintas fuentes de variación, por cuanto las fluctuaciones en *Z* sólo se originan en *X* y *V* y el modelo en cuestión justamente distingue los impactos de ambos tipos de fuentes. Esto se demuestra al tomar varianza en la ecuación (25):

$$\text{Var Z} = n_1^2 \ \text{VarX} + S_V^2 + 2n_1S_{XV} = 1$$

donde S_V^2 simboliza la varianza de la variable *V*. Además, en razón de que las variables observadas se encuentran todas estandarizadas, las varianzas de *X* y *Z* son iguales a la unidad.

El supuesto de que *X* y *V* no se encuentran correlacionados adquiere ahora toda su importancia. La ausencia de relación conduce a que la covarianza de *X* y *V* asuma el valor cero, de donde obtenemos la siguiente expresión para la varianza de *Z*:

$$\text{(26)} \qquad \text{Var Z} = n_1^2 + S_V^2 = 1$$

De esta manera, además de lograr conocer el valor de n_1, estamos en condiciones de apreciar la importancia relativa de las fuentes de variación de *Z*, ya que hemos obtenido una partición de su varianza en dos componentes: n_1^2 que refleja el peso de la operación de *X* y S_V^2 que muestra la acción de factores que afectan únicamente a *Z*.

En segundo lugar, hay que recordar que el sistema formado por (24) y (25) se caracteriza por conducir a la ecuación reducida, que en este caso resulta ser:

$$\text{(27)} \qquad Y_i = (m_1 + n_1m_2)X_i + (U_i + m_2V_i)$$

Según se ha visto, el coeficiente $(m_1 + n_1m_2)$ expresa la magnitud del efecto total de *X* sobre *Y*. Por otra parte, en la forma reducida este impacto está bien diferenciado de los posibles efectos propios de *Z* originados en movimientos de *V*, puesto que la variación en *Y* que obedezca a esa causa se rescata en el componente m_2V_i del término estocástico de (27).

La regresión de *Y* sobre *X* nos provee entonces de un procedimiento que permite evaluar la magnitud del efecto total. Además, al tomar varianza de (27) obtenemos una partición de la variación observada de *Y* que nos capacita para determinar el peso relativo de ese impacto:

$$\text{(28)} \qquad \text{Var Y} = (m_1 + n_1m_2)^2 + (S_U^2 + m_2^2S_V^2 + 2m_2S_{UV}) = 1$$

Hay que destacar que se han eliminado de esta última igualdad todos los términos que contienen como factor las covarianzas de *X* con *V* y de

X con *U*, ya que partimos del supuesto de que ellas son igualees a cero.

El lado derecho de la igualdad (28) se descompone en el cuadrado de la magnitud del efecto total y en una combinación de impactos originados por el movimiento de las variables propias de *Z* ($m_2^2 S_V^2$), de*Y* (S_U^2) y en la covariación entre U y V ($2m_2S_{UV}$).

En este momento, estaríamos en condiciones de evaluar el efecto propio de *X* sobre *Z* (n_1) y el impacto total de *X* sobre *Y*. Sin embargo, la validación del modelo causal exige la evaluación de los restantes parámetros: m_1 y m_2.

Ahora bien, si fijamos la atención en (28) es posible interpretarla como una ecuación que contiene seis incógnitas: n_1, m_1, m_2, S_U^2, S_V^2 y S_{UV}. Por otra parte, la igualdad (26) es susceptible de la misma interpretación, si es que adoptamos la convención de que los coeficientes de las magnitudes que no aparecen en ella son iguales a cero. De esta manera, si obtuviéramos otras cuatro ecuaciones en estas incógnitas, dispondríamos de un sistema cuya solución nos conduciría a conocer todos los parámetros fundamentales.

Las dos ecuaciones con las que ya contamos se han originado mediante el procedimiento de formar las varianzas de dos de las variables observables, *Z* e *Y*. Esto sugiere una extensión inmediata del procedimiento, puesto que el hecho de que *X* también es un observable nos permite determinar, sin dificultades, las covarianzas entre esas tres variables. Además, no debe olvidarse que, en general, la covarianza entre dos variables estandarizadas es idéntica al correspondiente coeficiente de correlación.

Tomemos primero la covarianza entre *X* y *Z*. La relación entre ambas variables dada por (25) es una de las hipótesis de nuestro modelo, pero ella a su vez implica que la covarianza en cuestión necesariamente se encontrará en una relación bien específica con los parámetros fundamentales. En efecto, si multiplicamos (25) por *X* y aplicamos el operador de esperanza matemática obtenemos que:

$$E(XZ) = n_1EX^2 + E(XV)$$

Puesto que la esperanza matemática del producto *XZ* es igual al coeficiente de correlación r_{XZ}, que la EX^2 es igual a la unidad en razón de que *X* es una variable estandarizada, y que se han supuesto *X* y *V* como variables aleatorias independientes, lo que implica que la covarianza de *X* con *V* es igual a cero, entonces resulta que esta expresión se reduce a:

$$r_{XZ} = n_1 \tag{28}$$

Aplicando el mismo procedimiento sobre la ecuación (24) se llega a:

$$r_{XY} = m_1 + m_2r_{XZ} \tag{29}$$

Para formar la covarianza entre Y y Z basta con multiplicar miembro a miembro las ecuaciones (25) y (27) y tomar esperanza matemática al producto. El resultado de esta operación es:

$$(30) \qquad r_{YZ} = (m_1 + m_2 n_1) n_1 + m_2 S_U^2 + S_{UV}$$

En este momento disponemos de cinco ecuaciones que contienen seis incógnitas:

$$\text{(I)} \quad \text{Var } Z = 1 = n_1^2 + S_V^2$$

$$\text{(II)} \quad \text{Var } Y = 1 = (m_1 + n_1 m_2)^2 + (S_U^2 + m_2^2 S_V^2 + 2m_2 S_{UV})$$

$$\text{(III)} \quad r_{XZ} = n_1$$

$$\text{(IV)} \quad r_{XY} = m_1 + m_2 r_{XZ}$$

$$\text{(V)} \quad r_{YZ} = (m_1 + m_2 n_1) n_1 + m_2 S_U^2 + S_{UV}$$

Desgraciadamente, no existen otras magnitudes que se puedan construir a partir de las variables observadas, y ello nos impide obtener una sexta ecuación, la que nos permitiría resolver el sistema. En lenguaje algebraico, éste está indeterminado; en idioma econométrico, el sistema de ecuaciones estructurales está subidentificado.

Para llegar a la identificación de los parámetros sólo hay un único camino abierto: establecer una restricción adicional, la que necesariamente se expresará en términos de las posibles relaciones entre las variables del modelo. Tradicionalmente, se decide postular la ausencia de correlación entre las variables U y V, lo que conduce a un sistema de cinco ecuaciones que contiene cinco incógnitas.

Abandonemos por un momento el análisis formal y retornemos al gráfico 4, de manera de examinar cuál es el contenido material de esta restricción adicional y cuáles son sus implicaciones.

Si bien hemos postulado que U y V son factores propios de Y y Z respectivamente, es posible que exista una correlación entre ellas, aun cuando hay que destacar que no es observable dado que el mismo rasgo caracteriza a U y V. Para que esa asociación esté presente sería necesario que una variable adicional, digamos W, no incorporada explícitamente en el modelo, estuviera afectando a las variables Y y Z.

Si este fuera el caso, el efecto de la variable relevante W estaría incluido en U y V, por la definición misma de estas variables. En concreto, las variables aleatorias U y V, representan, entre otras cosas, las fuentes de variación que afectan a Y y a Z y que no están explícitamente contempladas en el modelo. Como W sería precisamente un factor de variación de esta índole, se concluye que las partes que le son atribuibles en las variaciones de Z y de Y son rescatadas por U y por V.

De esta manera, esas dos últimas variables incluirían, parcialmente, volúmenes de variación concomitantes, lo que llevaría a una covarianza distinta de cero entre ellas. La magnitud de la asociación dependerá, como es lógico, de la importancia relativa que tenga W en la causación de Y y Z. Así, por ejemplo, si una gran parte de la varianza de las variables endógenas es explicada por W, la correlación entre U y V tenderá a ser alta.

Suponer que la covarianza entre U y V es cero equivale, por consiguiente, a hipotetizar de que no existen variables relevantes del tipo de W excluidas del modelo o, para decirlo de manera positiva, que todas las variables relevantes han sido incluidas explícitamente en la estructura causal postulada.[39] La noción de una incorporación explícita al modelo debe entenderse en el sentido de que la variable en cuestión se individualiza mediante una conceptualización bien específica, lo que implica, entre otras cosas, su observación y medición, además del establecimiento de proposiciones que aseveren, de modo concreto, cómo se relaciona con el resto del sistema.

Hemos visto que la respuesta al problema de la identificación del modelo en examen tiene un origen puramente formal. Sin embargo, se ha señalado que de él se derivan una serie de cuestiones de índole teórica. Todos los análisis y conclusiones recién expuestos pueden también ser vistos desde un punto de vista más matemático, por medio del gráfico 4: si S_{UV} fuera distinta de cero, las variaciones en V irían acompañadas de movimientos correspondientes en Y, tanto a través de la acción de Z como en virtud de la variación concomitante de U; en otras palabras, al relacionar los movimientos de Z e Y, sería imposible discriminar el efecto propio de esa primera variable del que se produce a través de U; por el contrario, si esa covarianza es cero, Z puede moverse con independencia del resto del sistema y estamos capacitados para evaluar el parámetro m_2 que refleja su impacto propio sobre Y.

Existe la noción de que el supuesto, que postula que la covarianza entre U y V es igual a cero, pertenece a la categoría de aquellas proposiciones constitutivas del modelo, que no son susceptibles de ser falsificadas. En otras palabras, puesto que tanto U como V no son observables, es imposible computar su covarianza y, por lo tanto, decidir sobre una base empírica acerca de la plausibilidad de esa proposición. Sin embargo, existe una posibilidad de refutación que, aun cuando es indirecta, nos permite considerarla como una hipótesis falsificable.

Si en algún momento, con posterioridad a la validación del modelo,

[39] Este tema ha sido abordado por Land K., "Identification, Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Recursive Sociological Models", en *Structural Equation Models in the Social Sciences*, *op. cit.*, pp. 19-49.

emerge evidencia empírica en el sentido de que una nueva variable, *W* es un antecedente causal tanto de *Y* como de *Z*, habrá que concluir, en virtud del análisis recién desarrollado, que S_{UV} necesariamente era distinta de cero. De esta manera, el hallazgo de una variable relevante adicional permitirá refutar el supuesto en cuestión y, por ende, rechazar el modelo que descansaba sobre esa hipótesis.

En resumen, las consecuencias básicas generadas por una covarianza distinta de cero son dos: i] en términos del problema de identificación, el número de incógnitas supera en uno a la cantidad de ecuaciones; se trataría, entonces, de un caso de subidentificación; ii] al surgir una variable *W* con las características indicadas, el modelo postulado debe ser rechazado y sustituido por una estructura causal que la incorpore explícitamente.

En este momento, el lector podrá preguntarse el porqué intentar resolver el problema de la identificación a través de $S_{UV} = 0$, en circunstancias de que existen otros cinco parámetros, en el sistema de ecuaciones de (I) a (V), que, en términos de posibilidad meramente lógica, admitirían el mismo tipo de supuesto que se ha hecho respecto a la covarianza.

En el caso de los parámetros m_1, m_2 y n_1, hacer cualquiera de ellos igual a cero implica alterar radicalmente la estructura causal. Esto se debe a la correspondencia uno a uno entre los nexos causales y los parámetros de las ecuaciones estructurales. Ello equivale a postular un modelo distinto y, por consiguiente, el proceso de validación estará referido a él. En otras palabras, terminaremos refutando o aceptando un modelo bien diferente del postulado.

Suponer que $S_V^2 = 0$ implica eliminar la fuente de variación propia de *Z*, y ello conduce a la imposibilidad de diferenciar su efecto propio m_2 del impacto indirecto de *X*. En términos formales, la hipótesis implica hacer cero no sólo la varianza S_V, sino también la covarianza entre *U* y *V*. Ello trae consigo una reducción del número de incógnitas a cuatro, pero el número de ecuaciones independientes disminuye a tres: una de las ecuaciones se reduce a una mera identidad (la ecuación I) y las ecuaciones (II) y (IV) resultan ser iguales. Este mismo resultado se obtiene al considerar que si la varianza de *V* es cero, entonces estamos en presencia de un caso de multicolinealidad perfecta, y ello acarrea la imposibilidad de diferenciar m_2 del efecto total ($m_1 + n_1m_2$).

Finalmente, cabe la alternativa de igualar a cero la varianza de *U*. Esto trae como consecuencia que el número de incógnitas baja desde seis a cuatro, ya que si la varianza de *U* es cero siempre se cumple que $S_{UV} = 0$; además, el número de ecuaciones se reduce a cuatro por cuanto (IV) se hace proporcional a (V). De esta manera, el sistema es identificable, y el supuesto conduce al mismo resultado que la solución clásica consistente en postular que S_{UV} es igual a cero.

La hipótesis en examen presenta, en relación con el supuesto más clásico, la característica de admitir dos posibilidades de falsificación. Por una parte, la restricción tendría que rechazarse al descubrirse una variable W que afectará simultáneamente a Y y Z, y esto por dos razones: i] como, por definición, U recoge el efecto de todas aquellas variables relevantes *directamente* explicativas de Y no incorporadas en el modelo, la existencia de W implica que la varianza de U es distinta de cero; ii] además, según se ha visto anteriormente, en tal caso S_{UV} no podría ser cero. Por otra parte, el hallazgo de variables relevantes explicativas de la variación de Y con independencia de las restantes, nos llevaría a rechazar $S_U^2 = 0$ en virtud de la definición de U tantas veces aludida.

El hecho de que por lo general se prefiera optar por la restricción $S_{UV} = 0$ en lugar de $S_U^2 = 0$, se explica por el contenido material del supuesto. En efecto, se hace difícil pensar que se hayan incorporado, en la estructura causal, de modo explícito y exhaustivo, todas las fuentes directas de variación de Y. Hay algunos casos en que el supuesto de nulidad de la varianza fluye naturalmente de las definiciones mismas de las variables como, por ejemplo, en la relación macroeconómica en que el ingreso se define como la suma de la inversión (ahorro) y el consumo. Sin embargo, este es un caso excepcional en las restantes disciplinas sociales.

Toda la exposición que se ha presentado es independiente de la información empírica que pueda existir respecto de las variables componentes del modelo. En este sentido, es evidente que el problema de identificación no es de naturaleza inferencial, ya que sólo atañe a las relaciones formales establecidas entre las variables.

Sin embargo, a todo investigador le interesa obtener estimaciones numéricas de los nexos causales característicos del modelo. Para ello, debe recurrir a datos que le permitan computar los coeficientes de regresión, así como las varianzas de los términos estocásticos U y V.

El estado del arte presenta dos alternativas para abordar el problema de la estimación: el así llamado análisis de trayectoria (*path analysis*), en sus múltiples encarnaciones, y los desarrollos econométricos.

El primero opera sobre la base de las ecuaciones poblacionales (I) a (V), resolviendo el sistema mediante el supuesto $S_{UV} = 0$ y remplazando los momentos poblacionales (varianzas y correlaciones) por los correspondientes momentos muestrales. Hemos demostrado que si la covarianza entre U y V es igual a cero, el sistema de ecuaciones en cuestión siempre tiene solución y ésta es única. Se plantea entonces el problema de cómo validar el modelo en términos de su grado de adecuación a la información disponible. En concreto, al investigador le interesa determinar si los efectos hipotetizados son o no distintos de cero y tener alguna evidencia acerca del grado de bondad de ajuste del modelo como un todo. Las estimaciones numéricas que proporciona la solución del sistema de ecuaciones permiten responder, en alguna medida, a la primera cuestión: si algunos de los vínculos resultan tener un valor cero, o un signo contrario al hipotetizado, ello permitirá rechazar el modelo en estos aspectos parciales.

La solución dada por el análisis de trayectoria al segundo problema emana de la particularidad resultante del hecho de que el procedimiento siempre proporciona una solución. Si el sistema de ecuaciones fuera tal que condujera a una solución sólo en aquellos casos en que el modelo sea "verdadero", no existiría ninguna dificultad; pero como obtendremos siempre una solución, aun cuando el modelo sea falso, nos vemos forzados a recurrir a algún expediente que nos permita salir de este *impasse*.

Esta dificultad se salva, en los análisis de trayectorias en boga, a través de la sobredeterminación del modelo, esto es, se intenta predecir correlaciones observables, pero que no intervienen como cantidades conocidas en el cómputo de los parámetros, por medio de la manipulación algebraica de las ecuaciones representativas de la estructura causal.[40] Es posible, entonces, contrastar las predicciones con los valores observados para llegar a una decisión respecto al grado de bondad de ajuste del modelo. Sin embargo, hay que destacar que esa decisión es arbitraria por cuanto no hay criterios objetivos, análogos a los de la inferencia estadística, en los que pueda apoyarse. Además, no siempre es posible deducir predicciones acerca de correlaciones observables, y ello es precisamente lo que acontece en el modelo bajo examen.

La segunda alternativa, vale decir, los desarrollos econométricos, encaran el problema de la identificación imponiendo, por lo general, restricciones sobre los parámetros asociados a las variables explicativas, tanto endógenas como exógenas, con preferencia a aquellas condiciones referidas a las variables estocásticas del tipo de U y de V. Así, por ejemplo, Theil[41] afirma que:

> La identificación que se basa en restricciones sobre la distribución de las variables estocásticas es atractiva sólo cuando existe un conocimiento suficiente del proceso que las genera. Normalmente, este no es el caso.

El empleo de esta estrategia supone una cierta capacidad teórica para generar proposiciones que impliquen esas restricciones.

Desde el punto de vista de la estimación, se continúa con la lógica subyacente al modelo de regresión uniecuacional, esto es, se trata de obtener estimaciones de los parámetros estructurales mediante el ajuste del modelo a los datos utilizando un criterio *a priori* de minimización de residuos

[40] Ejemplos típicos de este modo de operar se encuentran en Blalock H., *op. cit.* y en Boudon R., *L'Analyse Mathematique des Faits Sociaux*, Plon, París, 1968.

[41] Theil, *op. cit.*, p. 494.

o maximización de verosimilitud. Estos procedimientos se caracterizan por entregar información respecto a las distribuciones de los estimadores de los parámetros fundamentales.

Sobre la base de esa información, es posible aplicar toda la conceptualización propia de la inferencia estadística, vale decir, efectuar decisiones acerca de diversas hipótesis nulas que interesan en función del contenido del modelo —por ejemplo, si m_1 es o no estadísticamente distinto de cero.

Según hemos visto, el sistema de ecuaciones (I) a (V) nos permite identificar los parámetros bajo el supuesto de que la covarianza entre U y V es cero. Pese a las dificultades que esa hipótesis puede entrañar, es de uso normal en el análisis de trayectorias aplicado a problemas de la investigación social que escapan al ámbito económico más ortodoxo. Esta situación ha sido caracterizada, en la literatura econométrica, mediante el concepto de modelo recursivo. El procedimiento de estimación en este tipo de modelos econométricos es relativamente simple: se reduce a aplicar el método mínimo cuadrático ordinario a cada una de las ecuaciones por separado. En nuestro ejemplo, se trataría de ajustar las ecuaciones (24) y (25).

V. El uso del conocimiento causal en el pronóstico

Esperamos que el extenso análisis realizado para los posibles modelos causales alternativos construidos a partir de tres variables, haya mostrado claramente las particularidades propias de los contextos predictivos y explicativos. Sin embargo, esta distinción tan radical obedece a finalidades de exposición, puesto que nuestro interés primordial ha residido en mostrar y acentuar las diferencias entre uno y otro uso del modelo de regresión, oscureciendo así los puntos de contactos.

Si se dispone de un modelo causal, validado mediante la estimación de las ecuaciones estructurales correspondientes, se puede pronosticar los valores de las variables endógenas a partir del conocimiento de las exógenas. De esta manera, si se tiene una explicación causal, es posible transitar sin dificultad al pronóstico. No obstante, la proposición inversa no es válida: si se dispone de un modelo de regresión adecuado a propósitos predictivos, ello no implica un conocimiento de la estructura causal que gobierna las relaciones entre las variables. Este conocimiento podría derivarse a partir de ese modelo de regresión, siempre que lo postuláramos como reflejo conveniente de una concatenación causal y tuviéramos éxito en su validación.

Al pronosticar sobre la base de un sistema de ecuaciones estructurales, se produce una mezcla de criterios: por una parte, hay elementos referidos a cuestiones íntimamente vinculadas con el problema de la validación, y por otra aquellos relacionados con la precisión de la predicción. Así, por ejemplo, en un caso nos referimos a signos de los coeficientes, partición de varianzas observadas, etcétera, mientras que en el otro nos interesa fundamentalmente la amplitud del intervalo de predicción.

Esta combinación no siempre será pacífica. Puede acontecer que la precisión obtenida mediante el empleo del modelo causal, aun cuando éste haya sorteado exitosamente todas las dificultades inherentes al proceso de validación, sea menor que la alcanzable, por ejemplo, a través de una sola ecuación de regresión.

Si se decide escoger esa última ecuación, hay un hecho que convendría no olvidar. En efecto, la construcción del intervalo de predicción incorpora las fuentes de errores generadas en el proceso de estimación, esto es, aquellas vinculadas a las varianzas de los estimadores y del término estocástico. Pero hay dos aspectos que no son contabilizados al proceder de esta manera: i] la especificación errónea de la ecuación de regresión y ii] la posibilidad de que sea falso el supuesto de invarianza en los parametros.

Es fácil incurrir en errores originados en esas fuentes cuando el énfasis en el pronóstico ha conducido a una despreocupación respecto a la individualización de la cadena causal implícita en todo contexto predictivo. Inversamente, cuando la meta principal del análisis radica en lograr identificarla, la lógica misma de la explicación lleva o bien a sensibilizar al investigador respecto de la posible operación de otras variables o a proporcionar los materiales idóneos para detectar el origen de la falta de invarianza.

En el ámbito del pronóstico, el uso de una sola ecuación de regresión no nos remite a preguntarnos acerca de la omisión de variables relevantes ni sobre la relación que pueda existir entre los distintos regresores. Por el contrario, ya hemos visto que estas inquietudes juegan un papel central en los procesos de construcción y validación de modelos causales. Así, en la sección anterior hemos visto cómo la existencia de una correlación estrecha entre dos variables explicativas nos habría impulsado hacia la inclusión de nuevas variables que permitan dar cuenta de dicha concomitancia. No parece irrazonable admitir que, a medida que se incluyen nuevas variables en el análisis, la probabilidad de un error de especificación por omisión de regresores es cada vez menor.

Toda predicción implica necesariamente la hipótesis de que las regularidades que gobiernan los datos son las mismas para el período de observación que para el de predicción.[42] Si bien este supuesto goza de cierta plausibilidad en situaciones relativamente estables y en que la distancia entre esos períodos es más o menos corta, por lo general interesará deter-

[42] Este tema se encuentra extensamente desarrollado en Christ C. F., *Econometrics Models and Methods*, John Wiley, Nueva York, 1966, pp. 544-555 y *passim.*

minar si esas características, traducidas en la invarianza de los parámetros fundamentales que reflejan esas regularidades, se mantienen o no.

Cuando se cuenta con un sistema de ecuaciones estructurales no sólo se podrá apreciar la existencia, en general, de un cambio en la estructura, sino que además se manifestará afectando a ciertos parámetros bien específicos. Al utilizar *una ecuación* de regresión como herramienta predictiva, en la gran mayoría de los casos, ella constituirá una ecuación reducida en relación con el sistema causal implícito, de modo tal que sus parámetros serán combinaciones de los parámetros fundamentales. En consecuencia, va a ser imposible, desde la partida, individualizar qué aspectos del modelo se han mantenido constantes y cuáles no.

Esta deficiencia tiene proyecciones bastante más serias que la recién expuesta. Puede acontecer que el cambio ocurrido entre ambos períodos sea de una magnitud relativamente pequeña y que sólo afecte a uno de los parámetros del modelo subyacente. Si se cuenta con una hipótesis causal explícita, podremos advertir cuál es la real significación de la variación. Muy por el contrario, al no contar con las ecuaciones estructurales, la forma reducida mostrará probablemente una fluctuación en todos sus parámetros, magnificándose así la acción del cambio original. Por ejemplo, si la estructura causal implícita es la descrita por (24) y (25), y se utiliza la ecuación reducida (27), para fines de pronóstico, un cambio de m_2 se traducirá en una variación del parámetro asociado a X en (27). Sin embargo, n_1 y m_1 han permanecido constantes. De este modo, la ignorancia de (24) y (25) conducirá a apreciar la existencia de un cambio posiblemente bastante más radical del que en realidad aconteció. Claramente, la situación se torna mucho más delicada a medida que aumenta la complejidad de la cadena causal subyacente.

Goldberger [43] ha sintetizado de manera conveniente, el posible impacto del cambio en un parámetro estructural sobre los parámetros de regresión, esto es, los que caracterizan a las formas reducidas que ordinariamente se emplearán en los contextos predictivos:

> Supongamos que la población, a partir de la cual se han generado nuestros datos, es la única población relevante; es decir, que el mecanismo que ha intervenido en la producción de nuestra muestra continuará engendrando todas las muestras futuras. Si ello es así para todo el universo relevante, los parámetros estructurales y los parámetros de regresión permanecerán idénticos. Los últimos son, entonces, tan fundamentales como los primeros. Pero supongamos que la población que ha generado los datos no va a continuar haciéndolo en el futuro. Específicamente, supongamos que, en la próxima población, uno y sólo uno de los parámetros estructurales cambia de valor. Entonces, es posible que para esa población futura todos los parámetros de regresión sean diferentes.

[43] Goldberger, *op. cit.*, p. 5.

En definitiva, la opción por intentos predictivos sobre la base de formas reducidas (ecuaciones de regresión tal como normalmente se usan), o por una inversión en investigaciones destinadas a esclarecer la estructura causal subyacente, dependerá del grado de estabilidad que posea el sector de la realidad que interesa. Si no hay razones que induzcan a pensar en cambios estructurales frecuentes o inminentes, puede aparecer como sensato escoger la primera forma de abordaje. Sin embargo, es incuestionable que de producirse una modificación de esa índole, el científico social o el planificador se encontrarán en mucho mejores condiciones si cuentan con un conocimiento, de un cierto grado de fineza, acerca de la estructura causal en mutación. Si prescindimos de esta motivación eminentemente práctica, es obvio que la investigación social debe inclinarse por la segunda alternativa.

La última idea bosquejada ha sido expuesta con gran lucidez por F. M. Fisher:[44]

> Las correlaciones históricas pueden en realidad constituir una manera fácil de predecir, en tanto que nada acontezca que introduzca perturbaciones en las asociaciones observadas. Aun más, es probable que en circunstancias "normales" este tipo de predicciones sea más eficaz que las predicciones alternativas basadas en un conocimiento de la estructura causal de los procesos estudiados. Sin embargo, en cuanto ocurre algo que altera la situación, la información estructural se hace indispensable. Esto puede ocurrir... ya sea porque parece deseable adoptar una política que va a afectar a una o más de las variables del sistema, o porque nos encontramos en un período que trae consigo alteraciones en las covariaciones históricas —como, por ejemplo, el caso de los puntos de quiebre en el ciclo económico. Estas ocasiones pueden ser, y probablemente serán, relativamente escasas; sin embargo, lo más probable es que se trate justamente del tipo de situaciones en que la precisión en la predicción es crucial.

Estas nociones son coincidentes con las de Goldberger, recién transcritas. La conclusión a extraer, parece ser transparente: aun cuando la finalidad perseguida sea la del pronóstico, la capacidad de responder con éxito y rapidez al fracaso es mucho mayor si se cuenta con un conocimiento más acabado de las relaciones causales operantes.

Por otra parte, existe un interés en la explicación *per se* propio de la investigación social y relativamente independiente de consideraciones prácticas. Desde este punto de vista, es especialmente relevante la noción que afirma el carácter esencialmente cambiante de aspectos fundamentales de la realidad social. Si este es el principio rector de una buena parte de la investigación, entonces la necesidad de tener conciencia de la distinción metodológica a que se han dedicado estas páginas cobra toda su importancia.

[44] Fisher, *op. cit.*, p. 3.

Aun a riesgo de fastidiar al lector, permítasenos transcribir el siguiente párrafo:[45]

> Esta línea de argumentación lleva a la conclusión de que la investigación orientada hacia la búsqueda de parámetros estructurales persigue como objetivo desentrañar los rasgos invariantes de los mecanismos que generan las variables observables. Estas características invariantes son aquellas que permanecen estables —o varían individualmente— en el conjunto de poblaciones de interés. Cuando los parámetros de regresión poseen esta invarianza, ello se constituye en los objetos legítimos de la investigación, y por consiguiente el análisis de regresión se convierte en una herramienta adecuada. Pero si los parámetros de regresión carecen de ese atributo, y ello parece ser el caso en la mayoría de las ciencias sociales, entonces la materia legítima de la investigación se desplaza hacia parámetros más fundamentales, cuyo análisis requiere de herramientas estadísticas que superan al análisis de regresión convencional.

VI. A MODO DE CONCLUSIONES

Parece conveniente destacar, finalmente, aquellos aspectos esenciales que dicen relación con el problema fundamental abordado en este trabajo: las peculiaridades que impone a la utilización del modelo de regresión el propósito que inspira al análisis, como también las vinculaciones existentes entre los dos tipos alternativos de empleo.

En un contexto predictivo, podemos decir, aun a riesgo de incurrir en una tautología, que el modelo de regresión constituye una herramienta de pronóstico. Ello significa que el interés recae en el producto final entregado por la ecuación y en su grado de confiabilidad.

Parece ser cierto, en términos puramente intuitivos, que se puede depositar un grado mayor de confianza en el pronóstico cuando el ajuste del modelo a los datos es mayor. Normalmente, esta consideración encuentra su expresión en el criterio consistente en atender a la magnitud del coeficiente de determinación obtenido.

Sin embargo, creemos haber indicado razones suficientes como para justificar el uso de un criterio distinto: frente a la necesidad de optar por modelos de predicción alternativos, para pronosticar la misma variable dependiente, debe elegirse aquel que proporcione el intervalo de menor amplitud.

Por otra parte, ambos criterios están relacionados, ya que por lo gene-

[45] Goldberger, *op. cit.*, p. 6.

ral la magnitud del coeficiente de determinación se asocia inversamente a la amplitud del intervalo de predicción. No obstante, la norma por la cual nos hemos inclinado presenta ventajas indudables: ella posee la característica de ser más inclusiva que la que atiende al coeficiente de determinación, por cuanto toma en consideración una serie de otros elementos *además* de aquellos que entran en la definición de aquél. Para ser más precisos, la gran virtud del criterio enfatizado en este trabajo encuentra su fundamento en el hecho de que, si bien un intervalo de menor amplitud implica necesariamente un coeficiente de determinación mayor, lo inverso no es *siempre* cierto. En efecto, hay casos en que el modelo caracterizado por un mayor R^2 total presenta, sin embargo, un intervalo más amplio que aquellos con coeficiente de determinación inferior. Una instancia clara de este hecho la tenemos en modelos que poseen una colinealidad estrecha entre los regresores.

A todo contexto predictivo subyacen dos tipos de supuestos que se tiende a olvidar, y que convendría tener siempre presentes. Por una parte, hay que suponer que tanto la forma funcional como las variables relevantes del modelo reflejan adecuadamente la red de relaciones que gobierna el comportamiento de los datos en la realidad, aun cuando el conocimiento de ella no es la meta del análisis. En otras palabras, hay que precaverse frente a la posibilidad de que se haya cometido un error de especificación. Por otra, toda predicción se hace bajo el supuesto de que la unidad para la cual se pronostica pertenece al mismo universo que comprende las observaciones utilizadas en la construcción de la ecuación de regresión. Esta idea se puede frasear alternativamente, diciendo que la predicción depende de la invarianza de los parámetros de regresión.

De esta manera, el problema fundamental en un contexto predictivo es el de los posibles errores que afecten al pronóstico. Ellos se derivan de dos fuentes: las vinculadas directamente al proceso de estimación y que originan la amplitud del intervalo y las que dicen relación con el grado de "adecuación" del modelo respecto a la realidad. El tratamiento de las primeras es del dominio del análisis estadístico, y en este sentido constituyen errores inferencialees que se encuentran de alguna manera controlados en virtud de las características del análisis de regresión mismo. En cambio, la segunda conduce a errores no inferenciales, y por tanto no considerados en el análisis estadístico tradicional. Por consiguiente, al realizar una predicción deberíamos ser aún más cautelosos en esta materia, que la prudencia característica del análisis estadístico.

Todo intento de explicación causal implica un desarrollo, de carácter más o menos teórico, que se expresa en el nivel del lenguaje común. El conjunto de proposiciones así obtenido pertenece en propiedad al ámbito que usualmente denominamos como "teórico", y presenta como uno de sus rasgos básicos el de no ser susceptible de una contrastación empírica inmediata.

El procedimiento adecuado para cubrir la distancia entre lo teórico y lo empírico consiste en obtener una formalización de la estructura causal postulada, de naturaleza tal que permita efectuar de manera más o menos inmediata su validación. Frecuentemente, se recurre como un paso intermedio a la representación gráfica como un artificio que permite visualizar las conexiones teóricas hipotetizadas entre las variables, facilitándose de este modo la construcción del modelo formal buscado. No obstante, esos diagramas participan de la característica ya señalada: no nos capacitan para realizar la contrastación con la información disponible.

La función que cumplen las ecuaciones estructurales —esto es, un conjunto de ecuaciones de regresión interdependientes— es precisamente la de proporcionar una representación formal que es susceptible de una evaluación empírica. Sin embargo, hay que destacar que las normas que gobiernan el pasaje desde las proposiciones teóricas hacia esas ecuaciones, son utilizadas por los científicos sociales de manera más bien intuitiva, aun cuando existen ya demostraciones que establecen isomorfismos entre álgebras gráficas y álgebras literales.

El análisis que hemos presentado muestra que son dos los aspectos básicos sobre los que recae el acento cuando se utiliza el modelo de regresión en la esfera de la explicación. Por un lado, el investigador debe preguntarse acerca de la justeza con que sus ecuaciones reflejan la trama de causas y efectos que ha hipotetizado. Esto supone establecer una correspondencia biunívoca entre los parámetros y cada uno de los vínculos causales, simples o complejos. Esta etapa de la investigación es de índole lógico formal, y no empírica como podría suponerse. Por el otro, interesa ajustar las ecuaciones a los datos de modo de decidir, sobre la base de las estimaciones obtenidas, acerca de la validez de la estructura causal en su totalidad y de aspectos parciales de ella.

La gran diferencia entre los contextos predictivo y explicativo reside en este último punto. La lógica de la explicación lleva a considerar no sólo el producto final y su grado de confiabilidad, sino *todos* los parámetros y relaciones de las ecuaciones estructurales. Es así como, en lugar de preocuparnos por la amplitud del intervalo de predicción, nuestra atención se desplaza hacia la descomposición de la varianza de las variables endógenas, como un medio para determinar el peso relativo de las distintas causas, y sobre la intensidad con que ellas operan.

Dada la importancia del coeficiente de determinación en la investigación social, se le puede escoger como ejemplo ilustrativo de la oposición entre pronóstico y explicación. Hemos demostrado que en este último caso, la magnitud del R^2 no es *per se* un buen criterio para juzgar el grado de adecuación del modelo. Los objetivos perseguidos por la explicación hacen necesaria su descomposición para evaluar realmente la importancia de las causas.

La literatura ofrece dos desarrollos para responder al problema de la estimación de los parámetros fundamentales: el así llamado análisis de trayectoria (*path analysis*) y los procedimientos generados en la literatura econométrica. Aunque a veces ellos aparecen como técnicas distintas y quizá contradictorias, creemos que existen razones suficientes para afirmar que se trata, en realidad, de las dos pinzas de una misma tenaza. En efecto, el análisis de trayectorias constituye un caso especial en el análisis econométrico general: los así denominados modelos recursivos. Su peculiaridad deriva de la respuesta específica que da al problema de la estimación. En el desarrollo propiamente econométrico, se procede de acuerdo a los principios clásicos de la inferencia estadística; en el análisis de trayectorias, se opta por la solución de un sistema de ecuaciones deducido a partir de las ecuaciones estructurales.

Como en todo orden de cosas, la distinción entre explicación y predicción no es absoluta. Aun más, existen situaciones en que parece ser más eficiente, en el sentido de minimizar el riesgo de error, apoyar el pronóstico sobre un conocimiento de la estructura causal operante. Estas instancias son aquellas en que los supuestos de buena especificación del modelo e invarianza de los parámetros gozan de poca plausibilidad.

Las ventajas que otorga el conocimiento causal previo se relacionan precisamente con esos dos tipos de posibles errores: la lógica causal contiene en sí el germen de una dinámica orientada hacia la incorporación de variables relevantes adicionales, minimizando de este modo la probabilidad del error de especificación; además, si se piensa que algunos parámetros pueden ser función de variables excluidas, es claro que la inclusión de éstas conducirá a una mayor estabilidad de ellos.

El conocimiento de la estructura causal, además nos entrega las únicas herramientas capaces de individualizar las fuentes del cambio en las estructuras, si es que éste se produce. Como frecuentemente se afirma que América Latina se caracterizaría por reiterados cambios de esa naturaleza, la potencialidad del tipo de análisis por el que abogamos se hace manifiesta.

APÉNDICE

Para establecer la relación entre vínculos causales y los parámetros de las ecuaciones de regresión, características de los diversos modelos analizados en este trabajo, se puede recurrir a una argumentación basada en derivadas parciales.

Sea la ecuación de regresión:

$$Y = m_0 + m_1X + m_2Z + U$$

en que por definición U no es función de Z ni de X, y X y Z no están relacionadas.

El efecto de X sobre Y manteniendo Z constante se representa matemáticamente por medio de la derivada parcial de Y con respecto a X; esta derivada es igual a:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = m_1$$

Del mismo modo, el impacto de Z sobre Y manteniendo constante X está dado por:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = m_2$$

Ahora supongamos que X y Z están funcionalmente relacionadas, esto es, por ejemplo, $Z = f(X)$. Si este es el caso la ecuación de regresión asume la forma:

$$Y = m_0 + m_1X + m_2f(X) + U$$

En este caso la derivada parcial que entrega el efecto de X sobre Y es:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = m_1 + m_2f'(X)$$

Luego, el impacto de X está formado por una combinación de efectos.